不動点演算子を持つ命題論理に対する循環証明体系のカット無し完全性

堀 弘昌（名古屋大学）　中澤 巧爾（名古屋大学）　龍田 真（国立情報学研究所）

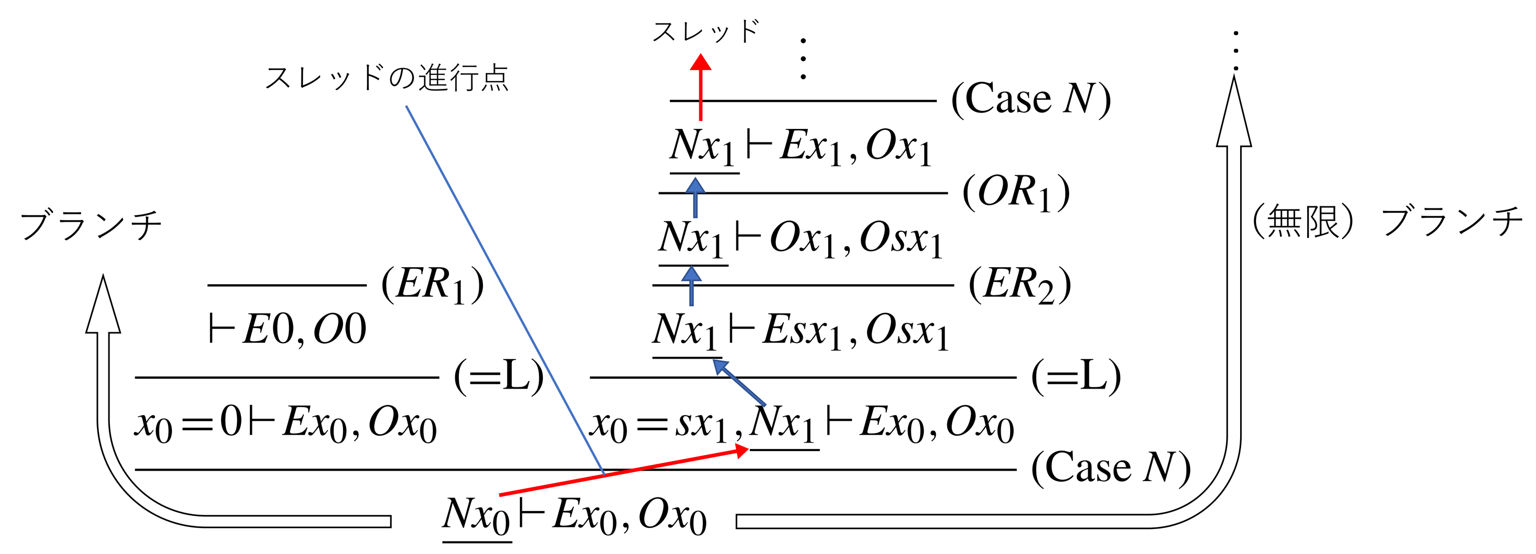
概要

成果：種々の命題論理に対する無限証明体系と循環証明体系について、以下を明らかにした

1. 擬有限性を満たす無限証明から同じ結論を持つ循環証明が構成可能であることを証明
2. いくつかの命題論理体系に対する、無限証明体系と循環証明体系の証明能力同等性を証明
3. 2で示した循環証明体系のカットなし完全性を証明

無限証明体系$LKID^\omega$[Brotherston 2006]

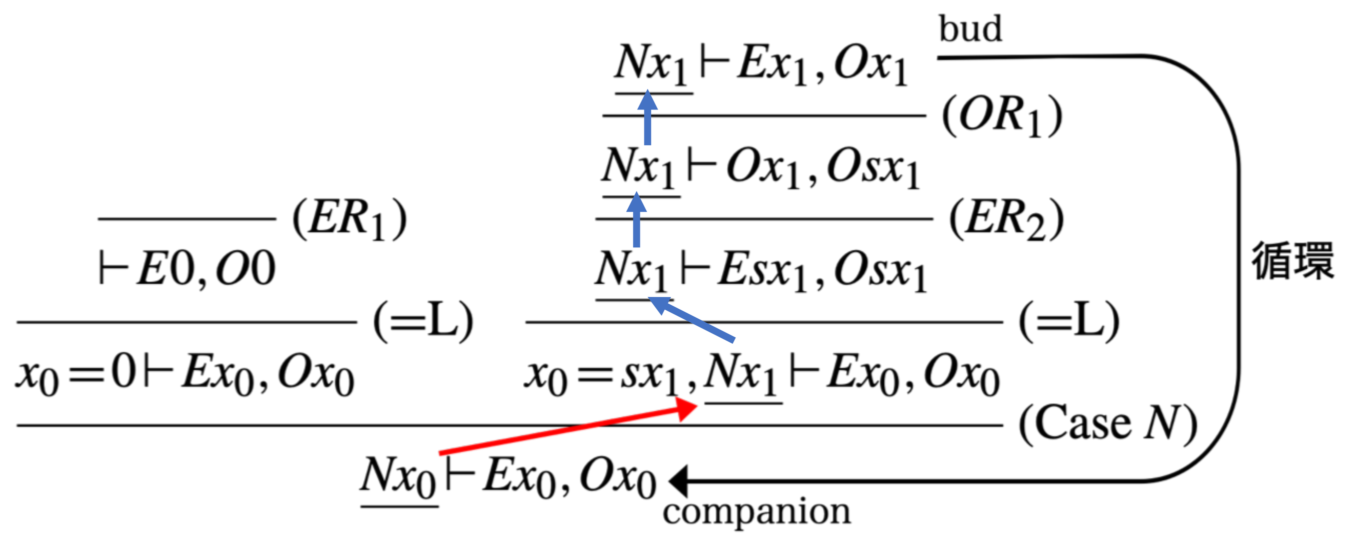
LK + 帰納的述語 + 無限ブランチ



・ブランチ＝証明木の枝
・スレッド＝矢印で繋がれている述語の列
・「全ての無限ブランチは無限に進行するスレッドを持つ」という健全性条件（大域スレッド条件）を満たすものを証明とする

循環証明体系$CLKID^\omega$ [Brotherston 2006]

LK + 帰納的述語 + 循環



・循環を展開した無限木が大域スレッド条件を満たす
→一般に無限証明体系より制限された体系

無限証明体系と循環証明体系のカットなし完全性

いくつかの無限証明体系はカットなし完全

- 一階述語論理 [Brotherston 2006]
- 乗法的加法的線形論理+不動点演算子 [Doumane 2007]
- 様相μ計算 [Studer 2008]
- 線形時相論理+不動点演算子 [Dax 2006]

いくつかの循環証明体系はカットなし完全でない

- 一階述語論理 [Masuoka+ 2020]
- シンボリック・ヒープ分離論理 [Kimura+ 2020]
- 線形論理 [Kawasaki 2023]
- bunched implicationの論理 [Saotome+ 2021]

どのような論理ならば、無限証明体系と循環証明体系の証明能力は等しくなるか？

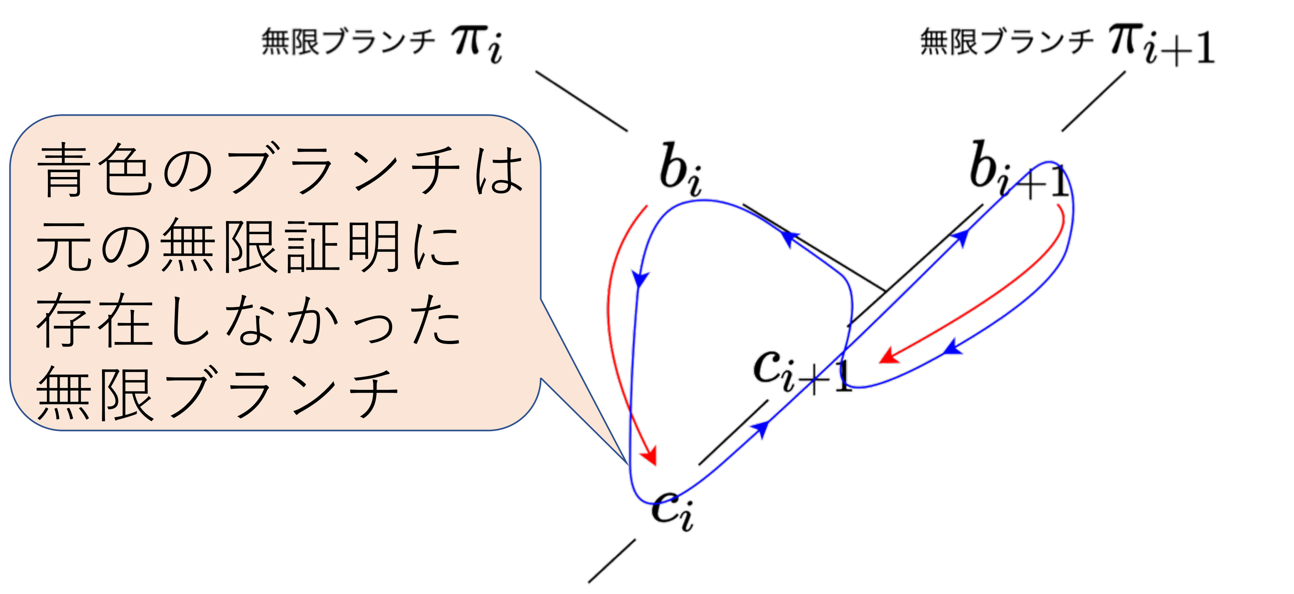
本研究の成果：無限証明から循環証明の構成

定理１：擬有限性を満たす無限証明から、同じ結論を持つ循環証明が構成可能である

- 擬有限性：各無限ブランチに出現するシーケントの集合が有限
- 補題１：無限証明の各無限パスについて、出現するシーケントの種類が有限ならば、任意の地点より上に大域スレッド条件を満たす循環を作成可能
- 補題１を用いて無限証明から循環証明を構成

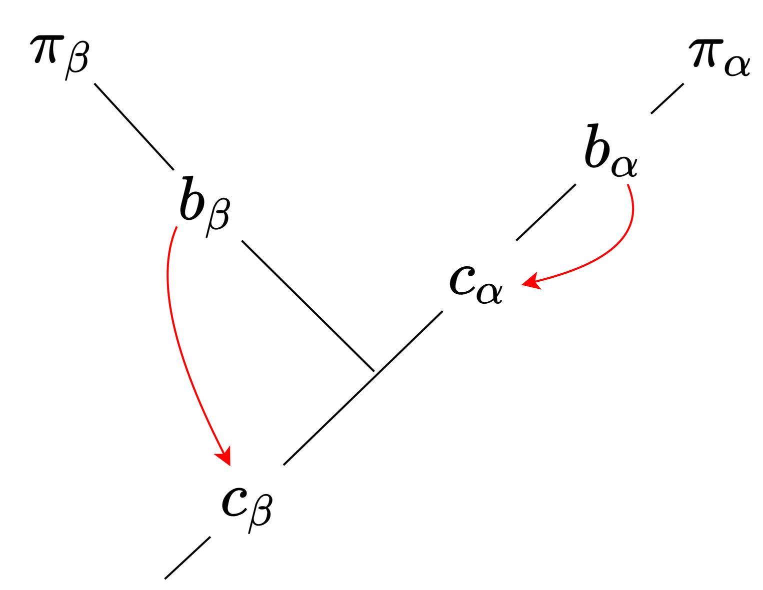
※ 本定理はシーケントの構造と種類の有限性にしか依存しないため、他の論理体系に適用可能

全ての無限ブランチに補題１を単純に用いるだけではダメ



青色の8の字のブランチでは大域スレッド条件の成立が保証されない

循環証明の構成（定理１の証明）



(*)$\cup_{\beta<\alpha} \pi_\beta$を$\{b_\beta\}$で切ると有限(∵ Königの補題)

- 無限ブランチ全体に順序数を用いてインデックスをつけ、$\{\pi_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$とする
- 補題１よりブランチπ_αの循環を、$\{(b_\beta, c_\beta) \mid \beta < \alpha\}$よりも上に構成（左図）
→ 任意のαについて、(*)より$\{(b_\alpha, c_\alpha) \mid \beta < \alpha\}$は有限であるため可能
- 全ての無限ブランチ$\{\pi_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$について$\{b_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$で切る
- 切った結果は(*)より有限木となり、大域スレッド条件を満たす

種々の命題論理に対する循環証明体系のカットなし完全性

- 定理１を利用することで、右の体系について無限証明体系と循環証明体系の証明能力が等しいことを証明
- 右の体系においては無限証明体系がカットなし完全であることが既に示されている
[Brotherston 2006] [Studer 2008] [Dax 2006]

	無限証明体系		循環証明体系
命題論理＋帰納的定義	$LKID^\omega_{prop}$	=	$CLKID^\omega_{prop}$
命題論理＋不動点演算子	μLK^∞	=	μLK^ω
線形時相論理 + 不動点演算子	$\mu LK\bigcirc^\infty$	=	$\mu LK\bigcirc^\omega$
様相μ計算	$\mu LK\Box^\infty$	=	$\mu LK\Box^\omega$

カットなし完全

定理２：右に示した循環証明体系はカットなし完全である