

無限証明体系と循環証明体系の証明能力同等性

堀 弘昌 (名古屋大学)

中澤 巧爾 (名古屋大学)

龍田 真 (国立情報学研究所)

概要

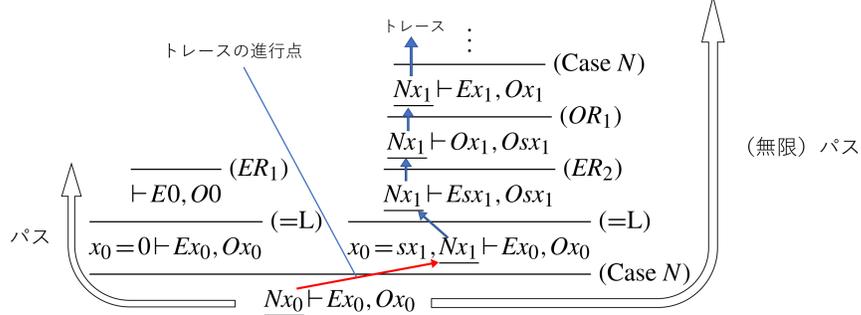
背景：一階述語論理の循環証明体系について、標準モデルに対する完全性は一般には成立しない
→言語に制限を加えた場合の完全性は？

目標：1引数述語、関数記号なしの場合の完全性を示す

成果：無限証明において、各無限パスに出現するシーケントの種類が有限ならば、
同じ結論を持つ循環証明が構成可能であることを証明

無限証明体系LKID ω [Brotherston 2006]

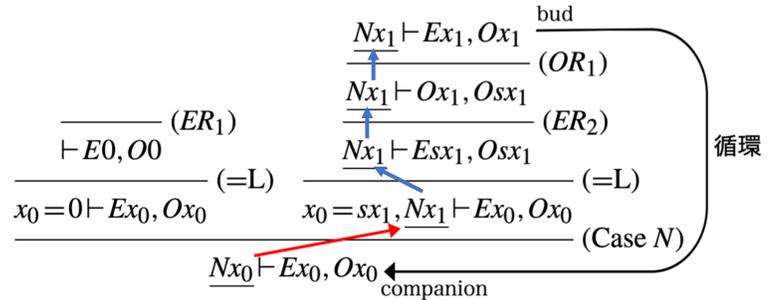
LK + 帰納的述語 + 無限パス



- ・パス = 証明木の枝
- ・トレース = 矢印で繋がれている述語の列
- ・「全ての無限パスは無限に進行するトレースを持つ」という健全性条件 (大域トレース条件) を満たすものを証明とする
- ・無限証明体系は標準モデルに対して完全 [Brotherston 2006]

循環証明体系CLKID ω [Brotherston 2006]

LK + 帰納的述語 + 循環



- ・循環を展開した無限木が大域トレース条件を満たす
→一般に無限証明体系より制限された体系
- ・循環証明体系のカットなし完全性

関数記号 \ 引数	0	1	2以上
あり	[Kimura+ 2021]	[Masuoka+ 2021] ×	[Masuoka+ 2021] ×
なし	○	○?	×

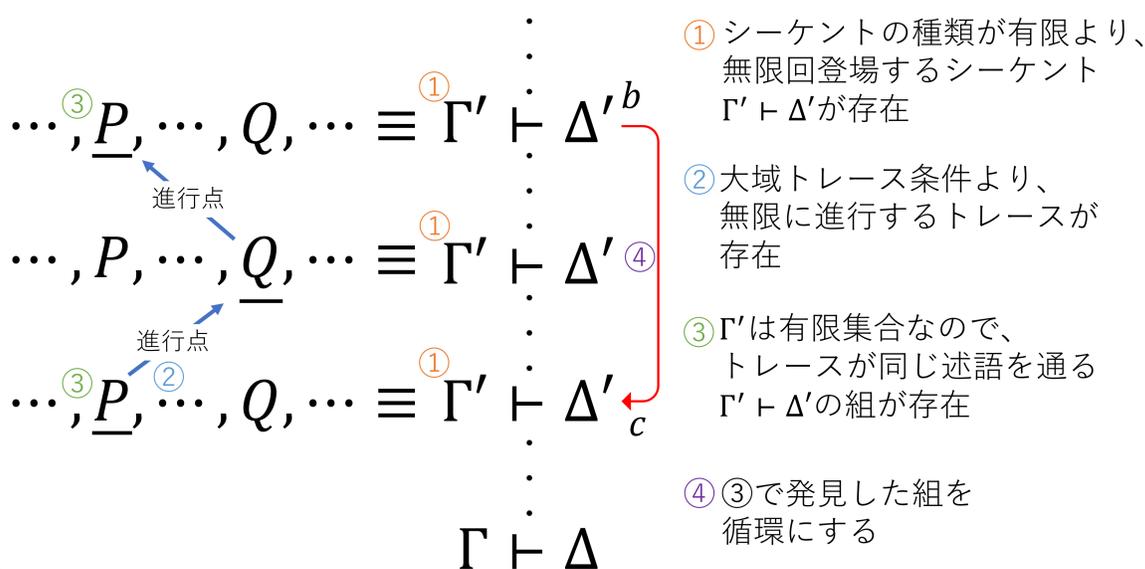
本研究の成果：無限証明から循環証明の構成

定理 1：無限証明において、各無限パスに出現するシーケントの種類が有限ならば、同じ結論を持つ循環証明が構成可能である

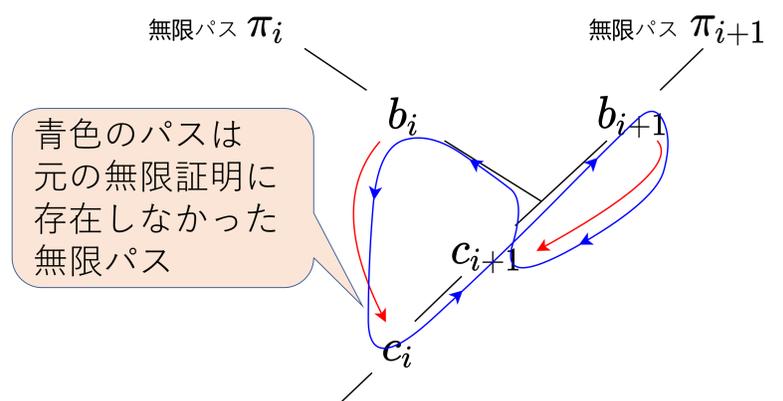
- ・補題 1：無限証明の各無限パスについて、出現するシーケントの種類が有限ならば、任意の地点より上に大域トレース条件を満たす循環を作成可能
- ・補題 1 を用いて無限証明から循環証明を構成

※ 本定理はシーケントの構造と種類の有限性にしか依存しないため、他の論理体系に適用可能

循環の構成 (補題 1 の証明)

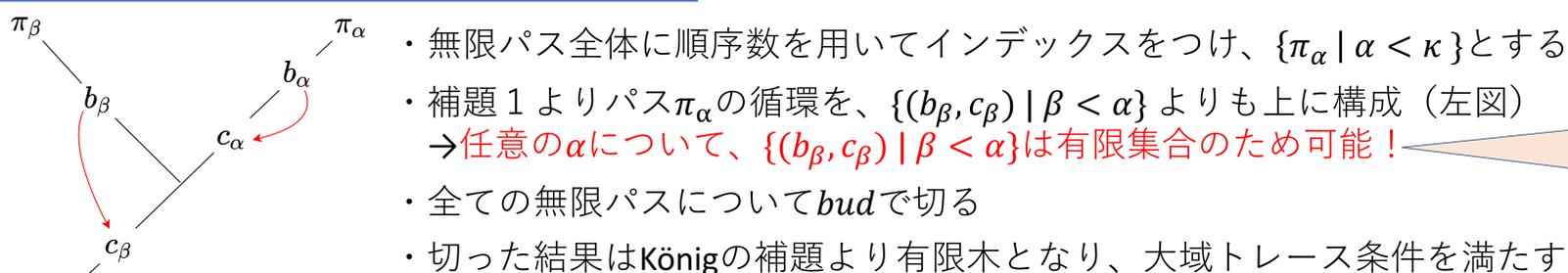


全ての無限パスに補題 1 を単純に用いるだけではダメ



青色のパスでは大域トレース条件の成立が保証されない

循環証明の構成 (定理 1 の証明)



$\{(b_\beta, c_\beta) \mid \beta < \alpha\}$ を無限集合と仮定すると、König の補題より矛盾

将来的に

「1引数、関数記号なしの場合は、無限証明で証明可能ならば有限種類のシーケントで証明可能」と予想
予想が証明できれば、今回の結果と合わせて、1引数、関数記号なしの循環証明体系の完全性が言える