コントロールオペレータをもつ計算体系の強正規化可能性のCPS変換を用いた証明

池田 聡[*]　　中澤 巧爾[†]

概 要

本論文では, コントロールオペレータをもつ型付計算体系の強正規化可能性を CPS 変換を用いて証明する. de Groote によって提案された $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ は, Standard ML を模した例外処理を形式化した体系である. $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の強正規化可能性は CPS 変換を用いて $\lambda^{\rightarrow}$ の強正規化可能性に帰着する方法により証明が試みられている. しかし, この証明は継続消滅と呼ばれる問題による誤りを含んでいるため, $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の強正規化可能性の証明はまだなされていない. そこで本論文では, 新しい CPS 変換を導入することで継続消滅による問題を解決し, $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の強正規化可能性を証明する. さらに, 導入した CPS 変換が, $\lambda\mu$ 計算の強正規化可能性の証明にも有効に働くことを示す.

1　はじめに

例外処理や継続などを扱うコントロールオペレータを含む計算体系の型理論に関する研究は, Griffin が [6] において古典論理との深い関係を指摘して以来, [10], [9], [1], [13] など, 非常に盛んに行なわれている.

[2] において de Groote が提案した $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ は, Standard ML の例外処理機構を形式化し, さらに改善した型付計算体系である. $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ は単純型付 λ 計算に, 例外処理の機構として **handle** と **raise** の 2 種類のコントロールオペレータを追加したものであり, その型理論は Curry-Howard 同型の意味で直観主義論理の自然演繹体系に排中律を付加した古典論理の自然演繹体系と対応している. また, [2] において de Groote は, $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ で型付け可能なプログラムでは発生した例外が必ず **handle** によって処理されることを示し, さらに強正規化可能性の証明を試みている.

コントロールオペレータを含む体系の強正規化可能性の証明方法として, 既に強正規化可能性が示されている他の体系への CPS 変換を考えることにより, その体系の強正規化可能性に帰着する方法がある. 実際に [11], [4] では, 型付 $\lambda\mu$ 計算の強正規化可能性を, CPS 変換を用いて型付 λ 計算の強正規化可能性に帰着する方法で証明することを試みている. [2] における $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の強正規化可能性の証明も, 単純型付 λ 計算 $\lambda^{\rightarrow}$ への CPS 変換を利用した方法によって試みられている. これらの証明では, コントロールオペレータを含む体系から λ 計算への変換として, 型付可能性と簡約関係を保存する CPS 変換を与えている. この変換を用いてコントロールオペレータを含む体系における無限簡約列を λ 計算の無限簡約列に変換することができれば, 強正規化可能性の証明を型付 λ 計算の強正規化可能性に帰着することができる.

しかし, 中澤らは [8] において, [11], [4], [2] の証明が**継続消滅**という同じ問題に起因する誤りを含むことを指摘している. [8] で示されている $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ に関する反例は以下の通りである. [2] の Proposition 8.3 では, $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の項 M, N について, M から N へ 1 ステップ簡約されるならば, それ

[*]京都大学工学部
[†]京都大学大学院情報学研究科

らの CPS 変換について $\overline{\overline{M}} \xrightarrow{+}_{\beta} \overline{\overline{N}}$ であると主張している．ここで, $\overline{\overline{M}}$ は M の CPS 変換を表し, $\xrightarrow{+}_{\beta}$ は 1 ステップ以上の β 簡約を表す．しかし, $M = (\mathbf{let}\ y : \neg\sigma\ \mathbf{in}\ z\ \mathbf{handle}\ (y\ x) \Rightarrow I\ x\ \mathbf{end})$, $N = (\mathbf{let}\ y : \neg\sigma\ \mathbf{in}\ z\ \mathbf{handle}\ (y\ x) \Rightarrow x\ \mathbf{end})$ とした場合, $\overline{\overline{M}}$ と $\overline{\overline{N}}$ は同じ λ 項 $\lambda k.k\ z$ に一致する．この原因は, ここで考えている CPS 変換がコントロールオペレータが行なう継続のやりとりを変換の際に計算しているため, コントロールオペレータによって消滅する継続が CPS 変換後の λ 項には反映されないからである．これを継続消滅と呼ぶ．継続消滅により, CPS 変換によって消滅する簡約基が存在するため, 無限簡約列を CPS 変換した結果が無限簡約列になることが証明できない．

[11] では reducibility を用いた手法と CPS 変換を用いた方法の二通りで $\lambda\mu$ 計算の強正規化可能性が証明されている．[8] では, このうちの CPS 変換を用いた証明の誤りを指摘し, 修正を示しているが, この修正は $\lambda\mu$ 計算の構造に依存したものであるため, $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の場合にこの方法を利用することはできない．このため, $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の強正規化可能性は未だ証明されていない．

本論文では, 従来の CPS 変換における継続消滅によって消滅する簡約基を保存しておくことにより, 簡約基の消滅が起こらないような CPS 変換を与え, この CPS 変換を用いて $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の強正規化可能性を証明する．また, 同様の考え方に基づく CPS 変換を $\lambda\mu$ 計算に対しても定義できることを示し, $\lambda\mu$ 計算の強正規化可能性の別証明を与える．ここで提案する $\lambda\mu$ 計算に対する CPS 変換は全ての簡約に対して 1 ステップ以上の簡約関係が保存されるという強い性質を持つため, 強正規化可能性の証明は従来のものに比べて非常に単純になっている．

本論文の構成は次の通りである．まず, 次節で $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の定義とその性質を紹介する．次に, 3 節で [2] の CPS 変換 (modified CPS-translation) の問題点について述べた後, 4 節で CPS 変換を改良し $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の強正規化可能性を示す．5 節では, 同様の CPS 変換を $\lambda\mu$ 計算に適用し, $\lambda\mu$ 計算の強正規化可能性の単純な証明を与える．最後に関連研究と結論を述べる．

2 $\boldsymbol{\lambda^{\rightarrow}_{exn}}$

$\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ は, Standard ML の **raise/handle** からなる例外処理の機構の形式化として単純型付 λ 計算を拡張した計算体系であり, de Groote によって提案された [2]．本節では, $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ を定義し, その性質を紹介する．

定義 2.1 (型) $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の型を次のように定義する．

$$\sigma, \tau ::= a \mid \bot \mid (\sigma \rightarrow \tau)$$

ここで, a は基底型である．$\bot$ は型定数であり Standard ML の例外型 *exn* に対応する．$\sigma \rightarrow \bot$ の略記として $\neg\sigma$ を用いる．

定義 2.2 (項と値) $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ には λ 変数 $(x, z, \ldots)$ と例外変数 $(y, \ldots)$ の 2 種類の変数があり, 項と値は次のように定義される．

$$\begin{array}{lll} (\textbf{項}) & L, M, N ::= & x \mid y \mid \lambda x.M \mid (M\ N) \mid \\ & & (\mathbf{raise}\ M) \mid \mathbf{let}\ y : \neg\sigma\ \mathbf{in}\ M\ \mathbf{handle}\ (y\ x) \Rightarrow N\ \mathbf{end} \\ (\textbf{値}) & U, V, W ::= & x \mid y \mid \lambda x.M \mid (y\ V) \end{array}$$

値ではない項を表すのに P, Q を用いる．$\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ においては, 例外変数の局所宣言とその例外に対応するハンドラは常に $\mathbf{let}\ y : \neg\sigma\ \mathbf{in}\ M\ \mathbf{handle}\ (y\ x) \Rightarrow N\ \mathbf{end}$ の形でセットで現れる．この

handle 文において, 部分項 M の例外変数 y, 部分項 N の λ 変数 x は束縛されているものとする．その他, 自由変数と束縛変数の定義については一般的な定義を用いるものとする．以下では, $FV(M)$ によって M 中に現れる自由変数の集合を表す. 以降, 束縛関係を明示し記述を簡単にするため以下の略記を用いる.

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}\ M) &= (\mathbf{raise}\ M),\\ \langle y.M|x.N\rangle &= \mathbf{let}\ y:\neg\sigma\ \mathbf{in}\ M\ \mathbf{handle}\ (y\ x) \Rightarrow N\ \mathbf{end},\\ \langle (y_i).M|(x_i.N_i)\rangle &= \langle y_1.\langle y_2.\cdots\langle y_n.M|x_n.N_n\rangle\cdots|x_2.N_2\rangle|x_1.N_1\rangle.\end{aligned}$$

定義 2.3 (簡約規則) $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ 項の簡約 $\rightarrow$ を以下の簡約を含む最小の合同関係とする.

$$\begin{aligned}
(\lambda x.M)\ V &\rightarrow M[x{:=}V] && (\beta_V)\\
U\ (\mathcal{R}\ V) &\rightarrow (\mathcal{R}\ V) && (\mathcal{R}_L)\\
(\mathcal{R}\ V)\ M &\rightarrow (\mathcal{R}\ V) && (\mathcal{R}_R)\\
(\mathcal{R}\ (\mathcal{R}\ V)) &\rightarrow (\mathcal{R}\ V) && (\mathcal{R}_I)\\
\langle y.V|x.N\rangle &\rightarrow V \qquad \text{if } y \notin FV(V) && (\mathcal{H}_S)\\
\langle (y_i).(\mathcal{R}\ (y_j\ V))|(x_i.N_i)\rangle &\rightarrow \langle (y_i).N_j[x_j{:=}V]|(x_i.N_i)\rangle && (\mathcal{H}/\mathcal{R})\\
V\ \langle y.M|x.N\rangle &\rightarrow \langle y.V\ M|x.V\ N\rangle && (\mathcal{H}_L)\\
\langle y.M|x.N\rangle\ L &\rightarrow \langle y.M\ L|x.M\ L\rangle && (\mathcal{H}_R)\\
(\mathcal{R}\ \langle y.M|x.N\rangle) &\rightarrow \langle y.(\mathcal{R}\ M)|x.(\mathcal{R}\ N)\rangle && (\mathcal{R}/\mathcal{H})
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ の反射的推移的閉包を $\twoheadrightarrow$ で表し, 広義の簡約関係 (あるいは, 単に簡約関係) と呼ぶ. また, $\rightarrow$ の推移的閉包を $\xrightarrow{+}$ で表し, 狭義の簡約関係と呼ぶ.

規則 $\mathcal{H}/\mathcal{R}$ で例外ハンドラが再利用でき, $\langle y.M|x.N\rangle$ の構造が外に広がる構造簡約 $\mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, \mathcal{R}/\mathcal{H}$ を含むなど, Standard ML の計算とは異なる部分がある．しかし, [2] の 6 章で論じられているように, Standard ML で例外ではない値に評価される項については, $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ でも同じ値に評価されるという意味で, Standard ML の例外処理の保守的な拡張であると言える.

定義 2.4 (型付け規則) $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の型付け規則は以下の通りである.

$$\frac{x:\sigma\in\Gamma}{\Gamma\vdash x:\sigma}\ (\text{Ax}) \qquad \frac{y:\neg\sigma\in\Gamma}{\Gamma\vdash y:\neg\sigma}\ (\text{AxExn})$$

$$\frac{\Gamma, x:\sigma\vdash M:\tau}{\Gamma\vdash \lambda x.M:\sigma\rightarrow\tau}\ (\text{Abs}) \qquad \frac{\Gamma\vdash M:\sigma\rightarrow\tau \quad \Gamma\vdash N:\sigma}{\Gamma\vdash M\ N:\tau}\ (\text{App})$$

$$\frac{\Gamma\vdash M:\bot}{\Gamma\vdash(\mathcal{R}\ M):\sigma}\ (\text{Raise}) \qquad \frac{\Gamma, y:\neg\sigma\vdash M:\tau \quad \Gamma, x:\sigma\vdash N:\tau}{\Gamma\vdash\langle y.M|x.N\rangle:\tau}\ (\text{Handle})$$

ここで、Γ は型環境であり, $x:\sigma$ の形の λ 変数に関する宣言と $y:\neg\sigma$ の形の例外変数に関する宣言の有限集合である.

[2] では $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の性質として以下が示されている.

定理 2.5 (Church Rosser Property) $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ は合流性を満たす.

定理 2.6 (Subject Reduction Property) 項 M に対し, ある環境 Γ と型 σ があって, $\Gamma \vdash M : \sigma$ を満たすとする. このとき, 項 N に対し, $M \to N$ ならば, $\Gamma \vdash N : \sigma$ である.

また, 強正規化可能性の証明に必要な性質として norm の概念を導入し, 次の性質が示されている.

定義 2.7 (Norm) 項 M の norm $|M|$ を以下のように定義する.

(i) $|x| = 1$,

(ii) $|y| = 1$,

(iii) $|\lambda x.M| = |M|$,

(iv) $|M\ N| = (\#N \times |M|) + (\#M \times |N|)$,

(v) $|(\mathcal{R}\ M)| = |M| \times \#M$,

(vi) $|\langle y.M|x.N\rangle| = |M| + |N|$,

(vii) $\#x = 1$,

(viii) $\#y = 1$,

(ix) $\#\lambda x.M = \#M$,

(x) $\#M\ N = \#M \times \#N$,

(xi) $\#(\mathcal{R}\ M) = \#M$,

(xii) $\#\langle y.M|x.N\rangle = \#M + \#N + 1$.

補題 2.8 R が簡約規則 $\mathcal{R}_L$, $\mathcal{R}_R$, $\mathcal{R}_I$, $\mathcal{H}_S$, $\mathcal{H}_L$, $\mathcal{H}_R$, $\mathcal{R}/\mathcal{H}$ のひとつを表すとする. M, N を項とすると, $M \to_R N$ ならば, $|M| > |N|$.

3 CPS 変換と継続消滅の問題

[2] ではさらに, $\lambda^{\to}_{exn}$ から単純型付 λ 計算 $\lambda^{\to}$ への CPS 変換を用いた強正規化可能性の証明が試みられている. de Groote は, Plotkin [12] による値呼び λ 計算に対する CPS 変換を $\lambda^{\to}_{exn}$ に適用し, 次の CPS 変換を定義している. これは, [2] で modified CPS-translation と呼ばれるものである. 論理の観点からは Griffin [6] の二重否定変換に相当し型付可能性を保存する変換となっている.

定義 3.1 (CPS 変換) $\lambda^{\to}_{exn}$ 項から λ 項への CPS 変換 $\overline{M}$ および, その補助変換 $(M : K)$, $\Phi(V)$ を以下のように定義する. ここで, M は $\lambda^{\to}_{exn}$ 項, V は $\lambda^{\to}_{exn}$ の値, K は λ 項である.

(i) $\overline{M} \equiv \lambda k.(M : k) \qquad k \notin FV(M)$,

(ii) $V : K \equiv K\ \Phi(V)$,

(iii) $V\ W : K \equiv \Phi(V)\ \Phi(W)\ K$,

(iv) $V\ Q : K \equiv Q : \lambda n.\Phi(V)\ n\ K$,

(v) $P\ W : K \equiv P : \lambda m.m\ \Phi(W)\ K$,

(vi) $P\ Q : K \equiv P : \lambda m.(Q : \lambda n.m\ n\ K)$,

(vii) $(\mathcal{R}\ M) : K \equiv M : I$,

(viii) $\langle y.M|x.N\rangle : K \equiv (M : K)[y{:=}\lambda x.(N : K)]$,

(ix) $\Phi(x) \equiv x$,

(x) $\Phi(y) \equiv \lambda vk.k\ (y\ v)$,

(xi) $\Phi(\lambda x.M) \equiv \lambda x.\overline{M}$,

(xii) $\Phi(y\ V) \equiv y\ \Phi(V)$.

上の定義において, P, Q は値でない $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ 項である. また, $I \equiv (\lambda x.x)$ である.

直観的には, $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の構文で書かれたプログラムが, この CPS 変換により, コントロールオペレータをもたない $\lambda^{\rightarrow}$ の構文のプログラムに変換される. この際に, 関数 (λ 抽象) は 1 つ多くの引数 (継続) をとる CPS (Continuation Passing Style) と呼ばれる形に変換され, 継続が明示的に項に現れるようになる. 補助変換 $M : K$ は, 項 (部分項) M における継続を λ 項として表現したものが, K であることを意味している. 例えば (vii) は, **raise** が外側の項を捨てるという簡約規則 ($\mathcal{R}_L$, $\mathcal{R}_R$, $\mathcal{R}_I$) を, CPS 変換の段階で継続を捨てることで解釈しているとみなせる. 加えて, (viii) では, 代入という形で例外ハンドラを例外変数に対応する λ 変数に渡していることから, コントロールオペレータによる継続の操作に関する計算は, CPS 変換の段階で行われていることになる.

定義 3.2 (二重否定変換) 型 σ の 二重否定変換 $\overline{\sigma}$ および σ^* を以下のように定義する.

(i) $\overline{\sigma} \equiv \neg\neg\sigma^*$,

(ii) $a^* \equiv a$,

(iii) $\perp^* \equiv \perp$,

(iv) $(\sigma \rightarrow \tau)^* \equiv \sigma^* \rightarrow \overline{\tau}$.

命題 3.3 M が型付可能な $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ 項であれば, $\overline{M}$ は型付可能な λ 項である. より詳しく言えば, $\Gamma \vdash M : \sigma$ ならば, $\Gamma^* \vdash_\lambda \overline{M} : \overline{\sigma}$. ここで, $\Gamma^* \equiv \{(x : \sigma^*) | (x : \sigma) \in \Gamma\} \cup \{(y : \neg\sigma^*) | (y : \neg\sigma) \in \Gamma\}$ であり, $\vdash_\lambda$ は型付 λ 計算の型判断である.

$\lambda^{\rightarrow}$ の簡約については, β 簡約のみを考え, 1 ステップを $\rightarrow_\beta$ で表す. $\rightarrow_\beta$ の反射的推移的閉包を $\twoheadrightarrow_\beta$ で表し, (広義の) 簡約関係と呼ぶ. また, $\rightarrow_\beta$ の推移的閉包を $\xrightarrow{+}_\beta$ で表し, 狭義の簡約関係と呼ぶ.

定義 3.1 の CPS 変換は簡約関係を保存する.

命題 3.4 $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ 項 M, N が $M \rightarrow N$ を満たすとき, $\overline{M} \twoheadrightarrow_\beta \overline{N}$.

証明. $M \rightarrow N$ の導出に関する帰納法による. □

前節の norm の性質と上記の性質により, この CPS 変換を用いて $\lambda^{\rightarrow}$ の強正規化可能性に帰着するには, 規則 β_V, $\mathcal{H}/\mathcal{R}$ による簡約について, 狭義の簡約関係を保存することを示せばよい. [2] の Proposition 8.3 では, 規則 $\beta_V, \mathcal{H}/\mathcal{R}$ による簡約については, この CPS 変換が狭義の簡約関係を保存すると主張されている. しかし, [8] において次の 2 つの反例が示されている.

(i) $\langle y.z | x.I\ x\rangle \rightarrow_{\beta_V} \langle y.z | x.x\rangle$ に対して, $\langle y.z | x.I\ x\rangle : K \equiv \langle y.z | x.x\rangle : K \quad (\equiv K\ z)$.

(ii) $(\mathcal{R}\ M)\ (I\ x) \rightarrow_{\beta_V} (\mathcal{R}\ M)\ x$ に対して, $(\mathcal{R}\ M)\ (I\ x) : K \equiv (\mathcal{R}\ M)\ x : K \quad (\equiv M : I)$.

[8] では, CPS 変換の継続消滅がこの問題を引き起こすとしている. この CPS 変換は, コントロールオペレータが行う継続のやりとりを変換の際に計算することによって簡約関係を保存しているため, コントロールオペレータによって消滅する継続は, CPS 変換により消滅する. これを継続消滅と呼ぶ. 例えば (i) の場合, β 基 $(I\ x)$ が継続を通じて z に渡されるが, 例外変数 y が z に自由に現れないために継続が消滅する. (ii) の場合, $(\mathcal{R}\ M)\ (I\ x) : K \equiv (\mathcal{R}\ M) : \lambda m.(I\ x : \lambda n.m\ n\ K) \equiv M : I$ と変換されるが, β 基 $(I\ x)$ の情報を含む継続 $\lambda m.(I\ x : \lambda n.m\ n\ K)$ が変換によって失われる. す

なわち, $\langle y.M|x.N\rangle : K \equiv (M:K)[y:=\lambda x.N:K]$ の変換は, $y \notin FV(M)$ のときに規則 $\mathcal{H}_S$ 相当の簡約を行っていると考えられる. 同様に, $(\mathcal{R}\ M):K \equiv M:I$ の変換は, 規則 $\mathcal{R}_L, \mathcal{R}_R, \mathcal{R}_I$ 相当の簡約を行っていると考えられる. 継続消滅によって, $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の β_V, $\mathcal{H}/\mathcal{R}$ の簡約基が消滅することがあるので, [2] の Proposition 8.3 は成立しない.

単純に, 定義 3.1(viii) を $\langle y.M|x.N\rangle : K \equiv (\lambda y.(M:K))\ \lambda x.(N:K)$ とすれば, **handle** に関して継続消滅に因る問題は起こらないが, この場合, 規則 $\mathcal{H}/\mathcal{R}$ の簡約関係が保存されない. **raise** についても, 定義 3.1(vii) を入れ替えるだけでは問題の解決は困難である.

4 CPS 変換の改良と強正規化可能性

CPS 変換に改良を施すことにより $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の強正規化可能性を示す. 改良の方針は, 従来の CPS 変換によって消滅する可能性のある簡約基の情報が変換後の λ 項に現れることを保証することである.

定義 4.1 (改良 CPS 変換) $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ 項から λ 項への改良 CPS 変換 $\overline{\overline{M}}$ および, その補助変換 $(M:D,K)$, $\Phi(V)$ を以下のように定義する. ここで, M は $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ 項, V は $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の値, D, K は λ 項である.

(i) $\overline{\overline{M}} \equiv \lambda dk.(M:d,k) \qquad d,k \notin FV(M)$,

(ii) $V:D,K \equiv \langle\!\langle K\ \Phi(V)/D\rangle\!\rangle$,

(iii) $V\ W:D,K \equiv \Phi(V)\ \Phi(W)\ D\ K$,

(iv) $V\ Q:D,K \equiv Q:\langle\!\langle D/\overline{\overline{V}}\rangle\!\rangle, \lambda n.\Phi(V)\ n\ D\ K$,

(v) $P\ W:D,K \equiv P:\langle\!\langle D/\overline{\overline{W}}\rangle\!\rangle, \lambda m.m\ \Phi(W)\ D\ K$,

(vi) $P\ Q:D,K \equiv P:\langle\!\langle D/\overline{\overline{Q}}\rangle\!\rangle, \lambda m.(Q:\langle\!\langle D/\overline{\overline{m}}\rangle\!\rangle, \lambda n.m\ n\ D\ K)$,

(vii) $(\mathcal{R}\ M):D,K \equiv M:D,I$,

(viii) $\langle y.M|x.N\rangle : D,K \equiv \langle\!\langle M:D,K/y\rangle\!\rangle[y:=\lambda x.(N:D,K)]$,

(ix) $\Phi(x) \equiv x$,

(x) $\Phi(y) \equiv \lambda vdk.\langle\!\langle k\ (y\ v)/d\rangle\!\rangle$,

(xi) $\Phi(\lambda x.M) \equiv \lambda x.\overline{\overline{M}}$,

(xii) $\Phi(y\ V) \equiv y\ \Phi(V)$.

上の定義において, P, Q は値でない $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ 項である. また, $\langle\!\langle M/N\rangle\!\rangle$ は $(\lambda xy.x)\ M\ N$ の略記である.

$M:D,K$ の直観的な意味としては, K は従来の継続 ($(M:K)$ における K) と対応している. D は消滅する可能性のある部分項の簡約基を保持するもので, 不要な場合はその一部を簡約によって捨てることができる「ゴミ」である.

改良 CPS 変換の性質について, まず, いくつかの補題を示す.

補題 4.2 D, K を λ 項, M を $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ 項とする. このとき, 任意の λ 変数 x について, $x \in FV(D)$ ならば, $x \in FV(M:D,K)$.

証明. M の構造に関する帰納法による. □

補題 4.3 $x \notin FV(M)$ のとき, $(M : D, K)[x := K'] \equiv M : D[x := K'], K[x := K']$.

証明. M の構造に関する帰納法による. □

補題 4.4 任意の $\lambda_{exn}^{\rightarrow}$ 項 M は次の性質を満たす.

(i) $K \rightarrow_\beta K'$ ならば, $M : D, K \twoheadrightarrow_\beta M : D, K'$,

(ii) $D \rightarrow_\beta D'$ ならば, $M : D, K \xrightarrow{+}_\beta M : D', K$.

証明. $k, d \notin FV(M) \cup FV(D) \cup FV(K)$ とする.

(i) 補題 4.3 より, $M : D, K \equiv (M : D, k)[k := K] \twoheadrightarrow_\beta (A : D, k)[k := K'] \equiv A : D, K'$.

(ii) 補題 4.2, 4.3 より, $M : D, K \equiv (M : d, K)[d := D] \xrightarrow{+}_\beta (M : d, K)[d := D'] \equiv M : D', K$.

□

補題 4.5 M を項, V を値とする.

(i) $\Phi(M)[x := \Phi(V)] \equiv \Phi(M[x := V]) \quad (M$ は値$)$,

(ii) $(M : D, K)[x := \Phi(V)] \equiv M[x := V] : D[x := \Phi(V)], K[x := \Phi(V)]$,

(iii) $\overline{\overline{M}}[x := \Phi(V)] \equiv \overline{\overline{M[x := V]}}$.

証明. M の構造に関する帰納法で, (i), (ii), (iii) を同時に証明できる. □

関数適用に対する変換 $M\ N : D, K$ は M, N が値か否かによって異なるが, 次の補題はそれぞれの関係を示すものである.

補題 4.6 M, N を $\lambda_{exn}^{\rightarrow}$ 項, V, W を $\lambda_{exn}^{\rightarrow}$ の値とすると,

(i) $N : \langle\langle D/\overline{\overline{V}}\rangle\rangle, \lambda n.\Phi(V)\ n\ D\ K \twoheadrightarrow_\beta V\ N : D, K$,

(ii) $M : \langle\langle D/\overline{\overline{W}}\rangle\rangle, \lambda m.m\ \Phi(W)\ D\ K \twoheadrightarrow_\beta M\ W : D, K$,

(iii) $M : \langle\langle D/\overline{\overline{N}}\rangle\rangle, \lambda m.(N : \langle\langle D/\overline{\overline{m}}\rangle\rangle, \lambda n.m\ n\ D\ K) \twoheadrightarrow_\beta M\ N : D, K$.

証明. M, N がそれぞれ値か否かの場合分けで証明できる. □

改良 CPS 変換は, 簡約関係を保存する. 特に簡約規則 $\beta_V, \mathcal{R}_L, \mathcal{R}_R, \mathcal{H}/\mathcal{R}$ については狭義の簡約関係を保存する.

命題 4.7 M, M' を項, R を簡約規則のひとつとする. このとき $M \rightarrow_R M'$ ならば,

(i) $\Phi(M) \overset{(+)}{\twoheadrightarrow}_\beta \Phi(M') \qquad (M, M'$ は値$)$,

(ii) $M : D, K \overset{(+)}{\twoheadrightarrow}_\beta M' : D, K$,

(iii) $\overline{\overline{M}} \overset{(+)}{\twoheadrightarrow}_\beta \overline{\overline{M'}}$.

ここで, $\overset{(+)}{\twoheadrightarrow}_\beta = \begin{cases} \twoheadrightarrow_\beta & (R = \mathcal{R}_I, \mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R \text{ または } \mathcal{R}/\mathcal{H}) \\ \xrightarrow{+}_\beta & (R = \beta_V, \mathcal{R}_L, \mathcal{R}_R \text{ または } \mathcal{H}/\mathcal{R}) \end{cases}$

証明. $M \to_R M'$ の導出に関する帰納法で, (i), (ii), (iii) を同時に証明する. (i), (iii) は容易に示せるので, (ii) の証明のみを記す.
Basis:

$(\boldsymbol{\beta_V})$

$$\begin{aligned}
(\lambda x.M)\ V : D, K &\equiv \Phi(\lambda x.M)\ \Phi(V)\ D\ K \\
&\equiv \lambda x.\overline{\overline{M}}\ \Phi(V)\ D\ K \\
&\to_\beta \overline{\overline{M}}[x := \Phi(V)]\ D\ K \\
&\equiv \overline{\overline{M[x := V]}}\ D\ K && (\because \text{補題 } 4.5) \\
&\equiv (\lambda dk.(M[x := V] : d, k))\ D\ K \\
&\xrightarrow{+}_\beta M[x := V] : D, K && (\because \text{補題 } 4.3)
\end{aligned}$$

$(\boldsymbol{\mathcal{R}_L})$

$$\begin{aligned}
U\ (\mathcal{R}\ V) : D, K &\equiv (\mathcal{R}\ V) : \langle\!\langle D/\overline{\overline{U}}\rangle\!\rangle, \lambda n.\Phi(U)\ n\ D\ K \\
&\equiv V : \langle\!\langle D/\overline{\overline{U}}\rangle\!\rangle, I \\
&\xrightarrow{+}_\beta V : D, I && (\because \text{補題 } 4.4) \\
&\equiv (\mathcal{R}\ V) : D, K
\end{aligned}$$

$(\boldsymbol{\mathcal{H}_S})$

$$\begin{aligned}
\langle y.V | x.N\rangle : D, K &\equiv \langle\!\langle V : D, K/y\rangle\!\rangle[y := \lambda x.N : D, K] \\
&\to_\beta (V : D, K)[y := \lambda x.N : D, K] \\
&\equiv V : D, K && (\because y \notin FV(V))
\end{aligned}$$

$(\boldsymbol{\mathcal{H}_L})$

$$\begin{aligned}
&V\ \langle y.M | x.N\rangle : D, K \\
&\quad \equiv \langle y.M | x.N\rangle : \langle\!\langle D/\overline{\overline{V}}\rangle\!\rangle, \lambda n.\Phi(V)\ n\ D\ K \\
&\quad \equiv \langle\!\langle (M : \langle\!\langle D/\overline{\overline{V}}\rangle\!\rangle, \lambda n.\Phi(V)\ n\ D\ K)/y\rangle\!\rangle \\
&\qquad\qquad [y := \lambda x.(N : \langle\!\langle D/\overline{\overline{V}}\rangle\!\rangle, \lambda n.\Phi(V)\ n\ D\ K)] \\
&\quad \twoheadrightarrow_\beta \langle\!\langle V\ M : D, K/y\rangle\!\rangle[y := \lambda x.(V\ N : D, K)] && (\because \text{補題 } 4.6) \\
&\quad \equiv \langle y.V\ M | x.V\ N\rangle
\end{aligned}$$

($\mathcal{H}/\mathcal{R}$) $N'_k = \lambda x_k.N_k : D, K$ とする.

$$
\begin{aligned}
&\langle (y_i).(\mathcal{R}\ (y_j\ V)) | (x_i.N_i)\rangle : D, K \\
&\quad \equiv \langle\!\langle \cdots \langle\!\langle (\mathcal{R}\ (y_j\ V)) : D, K / y_n \rangle\!\rangle [y_n := N'_n] \cdots / y_1 \rangle\!\rangle [y_1 := N'_1] \\
&\quad \equiv \langle\!\langle \cdots \langle\!\langle (y_j\ V) : D, I / y_n \rangle\!\rangle [y_n := N'_n] \cdots / y_1 \rangle\!\rangle [y_1 := N'_1] \\
&\quad \equiv \langle\!\langle \cdots \langle\!\langle \langle\!\langle I\ \Phi(y_j\ V) / D \rangle\!\rangle / y_n \rangle\!\rangle [y_n := N'_n] \cdots / y_1 \rangle\!\rangle [y_1 := N'_1] \\
&\quad \equiv \langle\!\langle \cdots \langle\!\langle \langle\!\langle I\ (y_j\ \Phi(V)) / D \rangle\!\rangle / y_n \rangle\!\rangle [y_n := N'_n] \cdots / y_1 \rangle\!\rangle [y_1 := N'_1] \\
&\quad \xrightarrow{+}_{\beta} \langle\!\langle \cdots \langle\!\langle y_j\ \Phi(V) / y_n \rangle\!\rangle [y_n := N'_n] \cdots / y_1 \rangle\!\rangle [y_1 := N'_1] \\
&\quad \equiv \langle\!\langle \cdots \langle\!\langle (\lambda x_j.N_j : D, K)\ \Phi(V) / y_n \rangle\!\rangle [y_n := N'_n] \cdots / y_1 \rangle\!\rangle [y_1 := N'_1] \quad (\because y_j \notin FV(N_j)) \\
&\quad \rightarrow_{\beta} \langle\!\langle \cdots \langle\!\langle N_j[x_j := V] : D, K / y_n \rangle\!\rangle [y_n := N'_n] \cdots / y_1 \rangle\!\rangle [y_1 := N'_1] \\
&\qquad\qquad (\because \text{補題 } 4.5,\ x_j \notin FV(D) \cup FV(K)) \\
&\quad \equiv \langle (y_i).N_j[x_j := V] | (x_i.N_i)\rangle : D, K
\end{aligned}
$$

他の簡約規則についても同様に示せる. **Inductive Step** は, 補題 4.4, 4.6 を用いて証明できる. □

[2] の CPS 変換と同様に, 改良 CPS 変換は型付可能性を保存する. ただし, CPS 変換の改良により, 型の変換にも修正を加える必要がある.

定義 4.8 (二重否定変換) 型 σ の二重否定変換 $\overline{\overline{\sigma}}$ および σ^* を以下のように定義する.

(i) $\overline{\overline{\sigma}} \equiv \neg\bot \to \neg\neg\sigma^*$,

(ii) $a^* \equiv a$,

(iii) $\bot^* \equiv \bot$,

(iv) $(\sigma \to \tau)^* \equiv \sigma^* \to \overline{\overline{\tau}}$.

命題 4.9 M が型付可能な $\lambda^{\to}_{exn}$ 項であるならば, $\overline{\overline{M}}$ は型付可能な λ 項である. より詳しく言えば, ある型環境 Γ と型 σ が存在して, $\Gamma \vdash M : \sigma$ のとき, 以下が成り立つ.

(i) M が値のとき, $\Gamma^* \vdash_\lambda \Phi(M) : \sigma^*$.

(ii) D, K を λ 項とする. 任意の型環境 Δ に対し,
$\Gamma^*, \Delta \vdash_\lambda D : \neg\bot$ かつ $\Gamma^*, \Delta \vdash_\lambda K : \neg\sigma^*$ ならば, $\Gamma^*, \Delta \vdash_\lambda (M : D, K) : \bot$.

(iii) $\Gamma^* \vdash_\lambda \overline{\overline{M}} : \overline{\overline{\sigma}}$.

ここで, $\Gamma^* \equiv \{(x : \sigma^*) | (x : \sigma) \in \Gamma\} \cup \{(y : \neg\sigma^*) | (y : \neg\sigma) \in \Gamma\}$ であり, $\vdash_\lambda$ は $\lambda^{\to}$ の型判断である.

証明. 型判断の導出に関する帰納法で, 同時に (i), (i)⇒(ii), (ii)⇒(iii) を証明できる. 証明は容易であるので, (i)⇒(ii) の一部のみを記す.

$$\Gamma^*, \Delta \vdash_\lambda D : \neg\bot \tag{1}$$

$$\Gamma^*, \Delta \vdash_\lambda K : \neg\sigma^* \tag{2}$$

とする.

— 導出の最後が,

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \to \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash M\ N : \sigma}$$

の形をしているとき, 次の 2 つの型判断は導出できる.

$$\Gamma^*, \Delta, m : (\tau \to \sigma)^*, \vdash_\lambda \langle\!\langle D/\overline{\overline{m}} \rangle\!\rangle : \neg\bot \tag{3}$$

$$\Gamma^*, \Delta, m : (\tau \to \sigma)^*, n : \tau^* \vdash_\lambda m\ n\ D\ K : \bot$$

$$\Longrightarrow \Gamma^*, \Delta, m : (\tau \to \sigma)^* \vdash_\lambda \lambda n.m\ n\ D\ K : \neg\tau^* \tag{4}$$

(3), (4) と $\Gamma \vdash N : \tau$ に対する帰納法の仮定から,

$$\Gamma^*, \Delta, m : (\tau \to \sigma)^* \vdash_\lambda (N : \langle\!\langle D/\overline{\overline{m}} \rangle\!\rangle, \lambda n.m\ n\ D\ K) : \bot$$

$$\Longrightarrow \Gamma^*, \Delta \vdash \lambda m.(N : \langle\!\langle D/\overline{\overline{m}} \rangle\!\rangle, \lambda n.m\ n\ D\ K) : \neg(\tau \to \sigma)^* \tag{5}$$

また, 帰納法の仮定から $\Gamma^*, \Delta \vdash_\lambda \overline{\overline{N}} : \overline{\overline{\tau}}$ が成立するので, (1) より,

$$\Gamma^*, \Delta \vdash_\lambda \langle\!\langle D/\overline{\overline{N}} \rangle\!\rangle : \neg\bot \tag{6}$$

が導出できる. (5), (6) と $\Gamma \vdash M : \tau \to \sigma$ に対する帰納法の仮定より,

$$\Gamma^*, \Delta \vdash_\lambda (M : \langle\!\langle D/\overline{\overline{N}} \rangle\!\rangle, \lambda m.(N : \langle\!\langle D/\overline{\overline{m}} \rangle\!\rangle, \lambda n.m\ n\ D\ K)) : \bot \tag{7}$$

ここで補題 4.6 より, $M : \langle\!\langle D/\overline{\overline{N}} \rangle\!\rangle, \lambda m.(N : \langle\!\langle D/\overline{\overline{m}} \rangle\!\rangle, \lambda n.m\ n\ D\ K) \twoheadrightarrow_\beta M\ N : D, K$ が成り立つので, $\lambda^\to$ の Subject Reduction により,

$$\Gamma^*, \Delta \vdash_\lambda (M\ N : D, K) : \bot$$

□

この変換は, 定義 3.2 の型の先頭に $M : D, K$ の D に対応する型 $\neg\bot$ を付けたものである.

命題 4.7, 4.9 によって, 3 節で述べた $\lambda^\to_{exn}$ の強正規化可能性を示すための条件は整った.

定理 4.10 (強正規化可能性) $\lambda^\to_{exn}$ の任意の型付可能な項は, 強正規化可能である. すなわち, 型付可能な $\lambda^\to_{exn}$ 項から始まる無限簡約列は存在しない.

証明. 型付可能な $\lambda^\to_{exn}$ 項 M を考える. R_* は簡約規則 $\mathcal{R}_I, \mathcal{H}_R, \mathcal{H}_L, \mathcal{R}/\mathcal{H}$ のひとつを表すとする. M に無限簡約列があると仮定する. M の無限簡約列を $M_1 (= M), M_2, \ldots$ とすると, 命題 4.7 により, $\overline{\overline{M_1}} \overset{(+)}{\twoheadrightarrow_\beta} \overline{\overline{M_2}} \overset{(+)}{\twoheadrightarrow_\beta} \cdots$ を満たす. また, $\overline{\overline{M_1}}$ は, 命題 4.9 から型付可能であるので, $\lambda^\to$ の強正規化可能性より $\overline{\overline{M_1}}$ は強正規化可能であり, 無限簡約列は存在しない. したがって, ある n があって $\overline{\overline{M_n}} \equiv \overline{\overline{M_{n+j}}}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ を満すことになる. このとき, 命題 4.7 より, M_n 以降の簡約は全て, 簡約規則 R_* で行われなければならない. しかし, 補題 2.8 から $|M_{n+|M_n|}| \leq 0$ となり norm が 1 以上の整数であることに反する.
よって, M に無限簡約列はない. したがって, M は強正規化可能である. □

5　$\lambda\mu$ 計算の強正規化可能性

Parigot は [11] の中で, $\lambda\mu$ 計算の強正規化可能性を二通りの方法で証明している．その一つは, CPS 変換を用いた方法であるが, $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の場合と同様, 継続消滅の問題による誤りを含んでいる．本節では, ここまで見てきた $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の強正規化可能性の証明方法の考え方が $\lambda\mu$ 計算の強正規化可能性の証明にも応用できることを示す．ここで提案する CPS 変換は全ての狭義の簡約を保存するため, 強正規化可能性の証明は従来のものと比べて非常に単純である．

$\lambda\mu$ 計算は以下のように定義される．

定義 5.1 (型) $\lambda\mu$ 計算の型は型変数 $(X, Y, \ldots)$ と $\perp$ から, 以下のように定義される．

$$\sigma, \tau ::= X \mid \perp \mid (\sigma \to \tau) \mid \forall X.\sigma$$

(項) $\lambda\mu$ 計算には λ 変数 $(x, z, \ldots)$ と μ 変数 $(\alpha, \beta, \ldots)$ の 2 種類の変数があり、項は次のように定義される．

$$M, N ::= \ x \mid \lambda x.M \mid (M\ N) \mid \Lambda X.M \mid (M\ \sigma) \mid \mu\alpha.M \mid [\alpha]M$$

(簡約規則) $\lambda\mu$ 計算の 1 ステップ簡約関係は以下を含む最小の合同関係とする．

$$(\lambda x.M)\ N \to M[x := N] \tag{β}$$

$$(\Lambda X.M)\ \sigma \to M[X := \sigma] \tag{β_t}$$

$$(\mu\alpha.M)\ N \to \mu\alpha.M[\alpha \Leftarrow N] \tag{μ}$$

$$(\mu\alpha.M)\ \sigma \to \mu\alpha.M[\alpha \Leftarrow \sigma] \tag{μ_t}$$

ここで, $M[\alpha \Leftarrow N]$, $M[\alpha \Leftarrow \sigma]$ は M 中の $[\alpha]L$ の形の部分項をそれぞれ $[\alpha]LN$, $[\alpha]L\sigma$ に再帰的に置き換えて得られる項である．

(型付け規則) $\lambda\mu$ 計算の型付け規則は以下の通りである．

$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma;\ \Delta}\ (\mathrm{Ax})$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau\ ;\ \Delta}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau\ ;\ \Delta}\ (\mathrm{AbsLam}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau\ ;\ \Delta \quad \Gamma \vdash B : \sigma\ ;\ \Delta}{\Gamma \vdash M\ N : \tau\ ;\ \Delta}\ (\mathrm{App})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \perp\ ;\ \Delta, \alpha : \sigma}{\Gamma \vdash \mu\alpha.M : \sigma\ ;\ \Delta}\ (\mathrm{AbsMu}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma\ ;\ \Delta}{\Gamma \vdash [\alpha]M : \perp\ ;\ \Delta, \alpha : \sigma}\ (\mathrm{Nam})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma\ ;\ \Delta}{\Gamma \vdash \Lambda X.M : \forall X.\sigma\ ;\ \Delta}\ (\mathrm{AbsTp}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \forall X.\sigma\ ;\ \Delta}{\Gamma \vdash M\tau : \sigma[X := \tau]\ ;\ \Delta}\ (\mathrm{AppTp})$$

ここで, Γ は $x : \sigma$ の形の λ 変数に関する型宣言の有限集合であり, Δ は $\alpha : \sigma$ の形の μ 変数に関する型宣言の有限集合である．また, 規則 (AbsTp) の結論には X が自由に現われないものとする．

[11] では, この $\lambda\mu$ 計算から二階の型付 λ 計算への変換として, 以下のような CPS 変換を与えて

いる．ここで, f は固定された λ 変数であり, 各 μ 変数 α に対して λ 変数 $\bar{\alpha}$ を用意している．

$$
\begin{aligned}
x^* &\equiv xf,\\
(\lambda x.M)^* &\equiv f(\lambda x.\lambda f.M^*),\\
(MN)^* &\equiv M^*[f{:=}\lambda z.z(\lambda f.N^*)f],\\
([\alpha]M)^* &\equiv M^*[f{:=}\bar{\alpha}],\\
(\mu\alpha.M)^* &\equiv M^*[\bar{\alpha}{:=}f],\\
(\Lambda X.M)^* &\equiv f(\Lambda X.\lambda f.M^*),\\
(M\sigma)^* &\equiv M^*[f{:=}\lambda z.z\sigma^* f].
\end{aligned}
$$

このとき, 例えば $((\mu\alpha.[\beta]x)M)^* \equiv (\mu\alpha.[\beta]x)^*$ という継続消滅が起こり, N 中の簡約基は CPS 変換後の項には反映されない．

そこで, $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の場合と同様に, 以下のような新しい型の変換と CPS 変換を導入する．

定義 5.2 (二重否定変換) 型 σ に対して, 二重否定変換 $\overline{\overline{\sigma}}$ および σ^* を以下のように定義する．

(i) $\overline{\overline{\sigma}} \equiv \neg\bot \to \neg\neg\sigma^*$,

(ii) $X^* \equiv X$,

(iii) $\bot^* \equiv \bot$,

(iv) $(\sigma \to \tau)^* \equiv \overline{\overline{\sigma}} \to \overline{\overline{\tau}}$,

(v) $(\forall X.\sigma)^* \equiv \forall X.\overline{\overline{\sigma}}$.

(改良 CPS 変換) $\lambda\mu$ 項から二階の λ 項への改良 CPS 変換 $\overline{\overline{M}}$ および $M : D, K$ (D, K は二階の λ 項) を以下のように定義する．ここで, 各 μ 変数 α に対して二つの新しい λ 変数 $\bar{\alpha}$, $\hat{\alpha}$ を用意している．また, $\langle\!\langle M/\sigma\rangle\!\rangle$ は $(\lambda x.\Lambda X.x)\ M\ \sigma$ の略記である．

(i) $\overline{\overline{M}} \equiv \lambda dk.(M : d, k) \qquad d, k \notin FV(M)$,

(ii) $x : D, K \equiv x\ D\ K$,

(iii) $\lambda x.M : D, K \equiv \langle\!\langle K(\lambda x.\overline{\overline{M}})/D\rangle\!\rangle$,

(iv) $M\ N : D, K \equiv M : \langle\!\langle D/\overline{\overline{N}}\rangle\!\rangle, \lambda m.m\ \overline{\overline{N}}\ D\ K$,

(v) $[\alpha]M : D, K \equiv \langle\!\langle (M : \hat{\alpha}, \bar{\alpha})/D\rangle\!\rangle$,

(vi) $\mu\alpha.M : D, K \equiv (M : \hat{\alpha}, I)[\hat{\alpha} := D][\bar{\alpha} := K]$,

(vii) $\Lambda X.M : D, K \equiv \langle\!\langle K(\Lambda X.\overline{\overline{M}})/D\rangle\!\rangle$,

(viii) $M\ \sigma : D, K \equiv M : \langle\!\langle D/\sigma^*\rangle\!\rangle, \lambda m.m\ \sigma^*\ D\ K$.

以下では, この CPS 変換において, 項の型付可能性と簡約関係が保存されることを証明する．簡約関係については, 任意の $\lambda\mu$ 計算の 1 ステップの簡約は, λ 計算の 1 ステップ以上の簡約に変換されるという強い性質が成り立つ．これにより, 型付 $\lambda\mu$ 計算の強正規化可能性は容易に二階の型付 λ 計算の強正規化可能性に帰着される．

補題 5.3 任意の型 τ, σ に対し, 以下が成り立つ.

(i) $\overline{\overline{\tau[X := \sigma]}} \equiv \overline{\overline{\tau}}[X := \sigma^*]$,

(ii) $(\tau[X := \sigma])^* \equiv \tau^*[X := \sigma^*]$.

証明. τ の構造に関する帰納法による. □

命題 5.4 M が型付可能な $\lambda\mu$ 項であるならば, $\overline{\overline{M}}$ は型付可能な λ 項である. より詳しく言えば, 型付 $\lambda\mu$ 計算で $\Gamma \vdash M : \sigma$; Δ ならば, 二階の型付 λ 計算で $\overline{\overline{\Gamma}}, \neg\Delta^*, \Delta_{\neg\perp} \vdash \overline{\overline{M}} : \overline{\overline{\sigma}}$ である. ここで,

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\Gamma}} &\equiv \{(x : \overline{\overline{\sigma}}) \mid (x : \sigma) \in \Gamma\},\\ \neg\Delta^* &\equiv \{(\bar{\alpha} : \neg\sigma^*) \mid (\alpha : \sigma) \in \Delta\},\\ \Delta_{\neg\perp} &\equiv \{(\hat{\alpha} : \neg\perp) \mid (\alpha : \sigma) \in \Delta\}.\end{aligned}$$

である.

証明. $\Gamma \vdash M : \sigma\ ; \Delta$ の導出に関する帰納法による. □

$\twoheadrightarrow_\beta$, $\xrightarrow{+}_\beta$ は, それぞれ二階の型付 λ 計算における簡約の反射的推移的閉包, 推移的閉包とする.

補題 5.5 任意の $\lambda\mu$ 項 M, 二階の λ 項 D, K に対し, 以下が成り立つ.

(i) $K \to K'$ ならば, $M : D, K \twoheadrightarrow_\beta M : D, K'$,

(ii) $D \to D'$ ならば, $M : D, K \xrightarrow{+}_\beta M : D', K$.

証明. 補題 4.4 と同様の方法で証明する. □

補題 5.6 M, N を $\lambda\mu$ 項とすると, $\overline{\overline{M}}[x := \overline{\overline{N}}] \twoheadrightarrow_\beta \overline{\overline{M[x := N]}}$.

証明. M の構造に関する帰納法による. □

補題 5.7 $\hat{\alpha}, \bar{\alpha} \notin FV(\overline{\overline{N}})$ のとき,

(i) $(M : D, K)[\hat{\alpha} := \langle\!\langle \hat{\alpha}/\overline{\overline{N}} \rangle\!\rangle][\bar{\alpha} := \lambda m.m\ \overline{\overline{N}}\ \hat{\alpha}\ \bar{\alpha}] \equiv M[\alpha \Leftarrow N] : D', K'$,

(ii) $\overline{\overline{M}}[\hat{\alpha} := \langle\!\langle \hat{\alpha}/\overline{\overline{N}} \rangle\!\rangle][\bar{\alpha} := \lambda m.m\ \overline{\overline{N}}\ \hat{\alpha}\ \bar{\alpha}] \equiv \overline{\overline{M[\alpha \Leftarrow N]}}$.

ここで, $D' = D[\hat{\alpha} := \langle\!\langle \hat{\alpha}/\overline{\overline{N}} \rangle\!\rangle][\bar{\alpha} := \lambda m.m\ \overline{\overline{N}}\ \hat{\alpha}\ \bar{\alpha}]$, $K' = K[\hat{\alpha} := \langle\!\langle \hat{\alpha}/\overline{\overline{N}} \rangle\!\rangle][\bar{\alpha} := \lambda m.m\ \overline{\overline{N}}\ \hat{\alpha}\ \bar{\alpha}]$ である.

証明. M の構造に関する帰納法による. □

命題 5.8 任意の $\lambda\mu$ 項 M, N について, $M \to N$ ならば以下が成り立つ.

(i) $M : D, K \xrightarrow{+}_\beta N : D, K$,

(ii) $\overline{\overline{M}} \xrightarrow{+}_\beta \overline{\overline{N}}$.

証明. $A \to B$ の導出に関する帰納法で証明する.

(i) について
Basis:

(β)

$$\begin{aligned}(\lambda x.M)\ N : D, K &\equiv \lambda x.M : \langle\!\langle D/\overline{\overline{N}}\rangle\!\rangle, \lambda m.m\ \overline{\overline{N}}\ D\ K \\ &\equiv \langle\!\langle(\lambda m.m\ \overline{\overline{N}}\ D\ K)(\lambda x.\overline{\overline{M}})/\langle\!\langle D/\overline{\overline{N}}\rangle\!\rangle\rangle\!\rangle \\ &\xrightarrow{+}_{\beta} (\lambda x.\overline{\overline{M}})\ \overline{\overline{N}}\ D\ K \\ &\to_{\beta} \overline{\overline{M}}[x{:=}\overline{\overline{N}}]\ D\ K \\ &\twoheadrightarrow_{\beta} \overline{\overline{M[x{:=}N]}}\ D\ K && (\because \text{補題 5.6}) \\ &\equiv (\lambda dk.(M[x{:=}N] : d, k))\ D\ K \\ &\xrightarrow{+}_{\beta} M[x{:=}N] : D, K\end{aligned}$$

(μ)

$$\begin{aligned}&(\mu\alpha.M)\ N : D, K \\ &\quad\equiv \mu\alpha.M : \langle\!\langle D/\overline{\overline{N}}\rangle\!\rangle, \lambda m.m\ \overline{\overline{N}}\ D\ K \\ &\quad\equiv (M : \hat{\alpha}, I)[\hat{\alpha}{:=}\langle\!\langle D/\overline{\overline{N}}\rangle\!\rangle][\bar{\alpha}{:=}\lambda m.m\ \overline{\overline{N}}\ D\ K] \\ &\quad\equiv (M : \hat{\alpha}, I)[\hat{\alpha}{:=}\langle\!\langle \hat{\alpha}/\overline{\overline{N}}\rangle\!\rangle][\bar{\alpha}{:=}\lambda m.m\ \overline{\overline{N}}\ \hat{\alpha}\ \bar{\alpha}][\hat{\alpha}{:=}D][\bar{\alpha}{:=}K] \\ &\quad\equiv (M[\alpha{\Leftarrow}N] : \langle\!\langle \hat{\alpha}/\overline{\overline{N}}\rangle\!\rangle, I)[\hat{\alpha}{:=}D][\bar{\alpha}{:=}K] && (\because \text{補題 5.7}) \\ &\quad\xrightarrow{+}_{\beta} (M[\alpha{\Leftarrow}N] : \hat{\alpha}, I)[\bar{\alpha}{:=}D][\alpha{:=}K] && (\because \text{補題 5.5}) \\ &\quad\equiv \mu\alpha.M[\alpha{\Leftarrow}N] : D, K\end{aligned}$$

Inductive Step については, 補題 5.5 より証明できる.

(ii) は, (i) より,

$$\begin{aligned}\overline{\overline{M}} &\equiv \lambda dk.M : d, k \\ &\xrightarrow{+}_{\beta} \lambda dk.N : d, k && (\because \text{(i)}) \\ &\equiv \overline{\overline{N}}.\end{aligned}$$

□

定理 5.9 (強正規化可能性) 任意の型付可能な $\lambda\mu$ 項は強正規化可能である.

証明. M を型付可能な $\lambda\mu$ 項とし, $M \to M_1 \to M_2 \to \ldots$ を M から始まる無限簡約列とする. このとき, 命題 5.4 より $\overline{\overline{M}}$ は二階の型付 λ 計算において型付可能である. また, 命題 5.8 より $\overline{\overline{M}} \xrightarrow{+}_{\beta} \overline{\overline{M_1}} \xrightarrow{+}_{\beta} \overline{\overline{M_2}} \xrightarrow{+}_{\beta} \ldots$ は λ 計算における無限簡約列となる. これは, 二階の型付 λ 計算の強正規化可能性に反する. □

6 関連研究と結論

中澤らは [8] において, それまでに試みられていた $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ と $\lambda\mu$ 計算の CPS 変換による強正規化可能性の証明 ([2], [11]) に, 継続消滅に因る同様の誤りがあることを指摘し, $\lambda\mu$ 計算の場合に対する

修正を提案している．この修正では, 任意の $\lambda\mu$ 項に対し, CPS 変換による継続消滅を起こさないような別の $\lambda\mu$ 項 (augmentation) を構成することにより, 継続消滅の問題を回避し, 強正規化可能性を証明しているが, この方法は $\lambda\mu$ 計算の構造に依存しているため $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ など他の体系への応用が難しい.

これに対し, 本論文で提案する方法は, CPS 変換の際に継続消滅によって消滅する簡約基を別に残しておくという単純な考え方に基いているため, $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ にも $\lambda\mu$ 計算にも適用できる, より汎用的な方法を与えていると言える．したがって, コントロールオペレータを含む他の計算体系の強正規化可能性の証明にも広く適用できることが期待される．例えば [3] では, 選言を含む自然演繹古典論理の強正規化可能性の CPS 変換を用いた証明を試みている．ここでは CPS 変換を, 継続消滅が起こる場合とそれ以外の場合に区別して定義する方法を用いているが, [7] において Matthes がその証明が誤りを含むことを指摘している．この体系に対しても本論文の方法は適用可能であると考えられる.

[5] では, λ 項の強正規化可能性を弱正規化可能性に帰着する多くの方法を紹介しており, それらが, Klop の ι 変換と呼ばれる, 簡約基の消滅を避ける変換で特徴付けられることを示している．CPS 変換の際に簡約基の消滅を避けるために本論文で用いた CPS 変換も [5] で紹介されている変換に類似しているが, コントロールオペレータを含む体系の強正規化可能性を CPS 変換を用いて証明するためにこのアイディアを適用した例はない．また, 本論文の方法は, CPS 変換の結果の項において継続とともに簡約基を保存しておくためのコピーも渡すようになっているという点で, [5] で紹介されている方法の自明な応用ではない.

また, 型付計算体系の強正規化可能性の証明の手法としては, Tait や Girard による reducibility を用いた方法が広く用いられている．実際, [11] における $\lambda\mu$ 計算の強正規化可能性の証明のひとつには, reducibility が用いられており, $\lambda^{\rightarrow}_{exn}$ の強正規化可能性をこの方法で示すことも考えられる．ただし, 型システムの構造に依存した reduciblitity の定義を与えることは必ずしも容易ではない．一方, 本論文の手法は, $\lambda^{\rightarrow}$ の強正規化可能性に依存してはいるが, 平易な概念のみを用いた単純なものであり, 他のコントロールオペレータを含む体系への応用も容易であると考えられる.

CPS 変換はコントロールオペレータを含むプログラムの挙動を, コントロールオペレータを含まないプログラムで解釈する方法を与えると考えることができる．この意味で, プログラムの等価性のみではなく, 計算過程をもこめた解釈を可能とする CPS 変換は重要である．しかし, これまでに考えられている CPS 変換は等価性, もしくは 0 ステップ以上の簡約関係 ($\twoheadrightarrow$) のみを保存するものばかりであり, 狭義の簡約関係 ($\xrightarrow{+}$) をも保存するような変換は未だ提案されていない．本論文で提案した $\lambda\mu$ 計算に対する CPS 変換は 1 ステップ以上の簡約関係を保存するものであるが, 構造簡約 (μ 簡約) の基を変換した際に発生する簡約基は, CPS 変換の際に残しておいた「ゴミ」を処理する簡約のためのものであり, 本質的に構造簡約を解釈しているとは言い難い．構造簡約のようなコントロールオペレータの挙動を, 計算過程をもこめて解釈できるような CPS 変換を, その存在性を含めて考えることは今後の課題である.

謝辞

有益なコメントを下さった, 京都大学の佐藤雅彦先生, 五十嵐淳先生, および, 査読者の方々に感謝致します.

参考文献

[1] Pierre-Louis Curien and Hugo Herbelin. The Duality of Computation. In *Proceedings of the Fifth ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP'00), Montreal, Canada*, pages 233–243, 2000.

[2] Philippe de Groote. A Simple Calculus of Exception Handling. In M. Dezani-Ciancaglini and G. Plotkin, editors, *Proceedings 2nd Int. Conf. on Typed Lambda Calculi and Applications, TLCA'95, Edinburgh, UK, 10–12 Apr. 1995*, volume 902, pages 201–215. Springer Verlag, Berlin, 1995.

[3] Philippe de Groote. Strong Normalization of Classical Natural Deduction with Disjunction. In S. Abramsky, editor, *TLCA 2001*, volume 2044 of *Lecture Note in Computer Science*, pages 182–196. Springer-Verlag, 2001.

[4] Ken-etsu Fujita. Domain-Free $\lambda\mu$-calculus. *Theoretical Informatics and Applications*, 34:433–466, 2000.

[5] Inge Li Gørtz, Signe Reuss, and Morten Heine Sørensen. Strong Normalization from Weak Normalization by Translation into the Lambda-I-Calculus. *Higher-Order and Symbolic Computation*, 16:253–285, 2003.

[6] Timothy G. Griffin. A Formulae-as-Types Notion of Control. In *Proceedings of POPL '90*, pages 47–58, 1990.

[7] Ralph Matthes. Stabilization — An Alternative to Double-Negation Translation for Classical Natural Deduction. In *Proceedings of Logic Colloquium 2003*, 2003.

[8] Koji Nakazawa and Makoto Tatsuta. Strong Normalization Proof with CPS-translation for Second Order Classical Natural Deduction. *Journal of Symbolic Logic*, 68(3):851–859, 2003. Corrigendum of this article is available in *The Journal of Symbolic Logic*, 68(4):1415–1416, 2003.

[9] C.-H. L. Ong and C. A. Stewart. A Curry-Howard Foundation fo Functional Computation with Control. In *Proceedings of POPL '97*, pages 215–227, 1997.

[10] Michel Parigot. $\lambda\mu$-Calculus: an Algorithmic Interpretation of Classical Natural Deduction. In *Proceedings of the International Conference on Logic Programming and Automated Reasoning*, volume 624 of *Lecture Note in Computer Science*, pages 190–201. Springer Verlag, 1992.

[11] Michel Parigot. Strong Normalization for Second Order Classical Natural Deduction. *Journal of Symbolic Logic*, 62(4):1461–1479, 1997.

[12] Gordon D. Plotkin. Call-by-Name, Call-by-Value and the lambda-Calculus. *Theor. Comput. Sci.*, 1(2):125–159, 1975.

[13] Philip Wadler. Call-by-Value is Dual to Call-by-Name. In *Proceedings of the Eighth ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP'03), Uppsala, Sweden*, pages 189–201, 2003.