値呼び $\lambda\mu$ 計算の合流性と強正規化性

中澤 巧爾

京都大学大学院理学研究科
e-mail: nakazawa@kusm.kyoto-u.ac.jp

概要

$\lambda\mu$ 計算は, Curry-Howard 同型の意味で古典論理と対応づけられる計算体系として Parigot によって導入された λ 計算の拡張であるが, 例外処理機構や継続を表現することが可能であるなど, プログラミング言語としても重要な性質を持つ. この値呼び $\lambda\mu$ 計算の合流性を, 並行変換を用いた方法によって証明する. また, その強正規化性を CPS 変換を用いた方法によって証明する.

1 はじめに

Curry-Howard 同型の意味で古典論理と対応づけられる計算体系は, 例外処理や継続を表現するプログラミング言語としていくつか紹介されている. Parigot [7] によって導入された $\lambda\mu$ 計算もこのような計算体系の一つであるが, これは他の体系に比べて単純な文法をもち, さらにプログラミング言語として充分強力な表現能力を持つことが知られている. この意味で, $\lambda\mu$ 計算のプログラミング言語としての性質は重要であり, 広く研究されている. 例えば, Ong, Stewart [6] は, 値呼び $\lambda\mu$ 計算の体系 $\lambda\mu_V$ を導入し, これを基にして値呼びプログラミング言語 $\mu\mathrm{PCF_V}$ を構成し, さらにこの体系が ML スタイルの例外処理機構や継続機構を表現できることを示している.

値呼び $\lambda\mu$ 計算の合流性は, 馬場, 廣川, 藤田の [1] による方法を拡張した並行変換を用いて証明する. [1] では, 従来の並行変換の概念を拡張することによって, シンプリフィケーションと呼ばれる簡約規則を含まないような値呼び $\lambda\mu$ 計算の合流性を証明している. シンプリフィケーションは, 自然な計算体系を構成するための簡約として Ong, Stewart の体系 $\lambda\mu_V$ などにも含まれるが, この簡約を含む体系を考える場合, [1] の並行変換をそのままの形で適用することは出来ない. そこで, この並行変換を拡張することによってシンプリフィケーションの規則を含む値呼び $\lambda\mu$ 計算の合流性を証明する.

値呼び $\lambda\mu$ 計算の強正規化性の証明には CPS 変換を利用する. ここで用いる CPS 変換は, [9] などで modified CPS-translation と呼ばれている変換に相当する. これは $\lambda\mu$ 項から λ 項への変換であり, 型付け可能性と簡約関係を保存するという性質を持つため, $\lambda\mu$ 計算の強正規化性を λ 計算のの強正規化性に帰着することができる. この変換は [4] や [8] などにおいても強正規化性の証明に利用されているが, これらの証明はいずれも誤りを含んでいる. これらの原因は, この変換が狭義の簡約関係までは保存しないことにある. すなわち, $\lambda\mu$ 計算において 1 ステップ以上の簡約関係にある 2 つの項が, 同一の λ 項に変換され得るため, 単純に λ 計算の場合に帰着できない. そこで我々は, $\lambda\mu$ 計算の狭義の簡約関係のうち, この変換によって保存されるもののクラスを明らかにし, その結果を利用して値呼び $\lambda\mu$ 計算の強正規化性を証明する. この方法は, 他のシステムに対する, CPS 変換を用いた強正規化性の証明にも適用できる.

2 値呼び $\lambda\mu$ 計算の定義

我々が考える値呼び $\lambda\mu$ 計算の体系は以下の通り定義される.

以下で考える体系は [5] で $\lambda_V\mu$ と呼ばれている体系であり, 多相型を持ち, [2] の意味で domain-free な $\lambda\mu$ 計算の値呼び体系である. 多相型を持つ値呼び $\lambda\mu$ 計算は, Curry スタイルの場合にサブジェクトリダクションを満たさない体系となることが知られている [5]. このため, 我々は domain-free な体系を考える. また, 以下の議論は自然に Church スタイルの場合に適用できる.

定義 2.1. (値呼び $\lambda\mu$ 計算の型と項)
(1) 変数として, 型変数（$s, t \ldots$）, λ 変数（$x, y \ldots$）, μ 変数（$\alpha, \beta \ldots$）を用意する.
(2) 型 ($\sigma, \tau \ldots$ で表す)

$$\sigma \ ::= \ t \mid \ \bot \ \mid \sigma \to \sigma \mid \forall t.\sigma$$

(3) 項 ($M, N \ldots$ または $P, Q \ldots$ で表す)

$$M \ ::= \ x \mid \lambda x.M \mid \Lambda t.M \mid \mu\alpha.M \mid MM \mid M\sigma \mid [\alpha]M$$

(4) 値 ($U, V, W \ldots$ で表す)

$$V \ ::= \ x \mid \lambda x.M \mid \Lambda t.M \mid [\alpha]M$$

定義 2.2. (μ 変数への代入)
μ 変数への代入 $M[\alpha \Leftarrow N]$, $M[N \Rightarrow \alpha]$ を以下の規則に基づいて, M に関して帰納的に定義する.

(r) $([\alpha]M)[\alpha \Leftarrow N] \equiv [\alpha]((M[\alpha \Leftarrow N])N)$
(t) $([\alpha]M)[\alpha \Leftarrow \sigma] \equiv [\alpha]((M[\alpha \Leftarrow \sigma])\sigma)$
(l) $([\alpha]M)[N \Rightarrow \alpha] \equiv [\alpha](N(M[N \Rightarrow \alpha]))$

定義 2.3. (簡約規則)
$\lambda\mu$ 項の簡約 $\triangleright$ を, 以下の簡約を含む最小の合同関係とする.

(β_v) $(\lambda x.M)V \triangleright M[x := V]$
(β_t) $(\Lambda t.M)\sigma \triangleright M[t := \sigma]$
(η_v) $\lambda x.Vx \triangleright V \quad (x \notin FV(V))$
(μ_r) $(\mu\alpha.M)N \triangleright \mu\alpha.M[\alpha \Leftarrow N]$
(μ_l) $V(\mu\alpha.M) \triangleright \mu\alpha.M[V \Rightarrow \alpha]$
(μ_t) $(\mu\alpha.M)\sigma \triangleright \mu\alpha.M[\alpha \Leftarrow \sigma]$
$(\mu\eta)$ $\mu\alpha.[\alpha]M \triangleright M \quad (\alpha \notin FV(M))$
(rn) $[\alpha](\mu\beta.V) \triangleright V[\beta := \alpha]$

$FV(M)$ は M に含まれる自由な λ 変数, μ 変数, 型変数の全体を表す. $(\mu_r), (\mu_l), (\mu_t)$ の簡約を構造簡約, $(\mu\eta)$ の簡約をシンプリフィケーション, (rn) の簡約を名前替えと呼ぶ. $\triangleright$ の推移的閉包を $\triangleright^+$ で, $\triangleright$ の反射的推移的閉包を $\triangleright^*$ で, それぞれ表す. $\triangleright^+$ を狭義の簡約関係と呼ぶ.

定義 2.4. (型付け規則)
(1) λ 文脈 $\Gamma ::= <> \mid x : \sigma, \Gamma$
(2) μ 文脈 $\Delta ::= <> \mid \sigma^\alpha, \Delta$
(3) $\Gamma, x : \sigma\,; \Delta \vdash x : \sigma \quad (ass)$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma\,; \Delta \vdash M : \tau}{\Gamma; \Delta \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau}\ (\to I)$$

$$\frac{\Gamma; \Delta \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma; \Delta \vdash N : \sigma}{\Gamma; \Delta \vdash MN : \tau}\ (\to E)$$

$$\frac{\Gamma; \Delta \vdash M : \sigma}{\Gamma; \Delta \vdash \Lambda t.M : \forall t.\sigma}\ (\forall I)$$

$$\frac{\Gamma; \Delta \vdash M : \forall t.\sigma}{\Gamma; \Delta \vdash M\tau : \sigma[t := \tau]}\ (\forall E)$$

$$\frac{\Gamma; \Delta \vdash M : \sigma}{\Gamma; \Delta, \sigma^\alpha \vdash [\alpha]M : \perp}\ (\perp I)$$

$$\frac{\Gamma; \Delta, \sigma^\alpha \vdash M : \perp}{\Gamma; \Delta \vdash \mu\alpha.M : \sigma}\ (\perp E)$$

$(\forall I)$ において, $t \notin FV(\Gamma) \cup FV(\Delta)$ である. また, $(\perp I)$ において, もし $\alpha \in FV(\Delta)$ ならば Δ 中で α に割り当てられている型は σ である.

定義 2.5.
(1) 記法として, $M\underline{N} \equiv NM$ を用いる. 例えば, $(\mu\alpha.M)\underline{V}P\underline{U} \equiv U(V(\mu\alpha.M)P)$ である.
(2) 記号 $A, B \ldots$ は, 通常の $\lambda\mu$ 項, 型, 下線付きの値, のいずれかを表す. 代入 $M[\alpha \Leftarrow A]$ は, A が通常の項 N のときは $M[\alpha \Leftarrow N]$ を, 型 σ のときは $M[\alpha \Leftarrow \sigma]$ を, 下線付きの値 $\underline{V}$ のときは $M[V \Rightarrow \alpha]$ をそれぞれ表すとする. このとき構造簡約の規則 (μ_r), (μ_l), (μ_t) は, 併せて

(μ) $(\mu\alpha.M)A \triangleright \mu\alpha.M[\alpha \Leftarrow A]$

と表される.
(3) 列 $\vec{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ に対して,
$M\vec{A} \equiv MA_1 \ldots A_n$
$M[\alpha \Leftarrow \vec{A}] \equiv M[\alpha \Leftarrow A_1] \ldots [\alpha \Leftarrow A_n]$
とする.

以上の記法のもとで, 次が成り立つ.
$(\mu\alpha.M)\vec{A} \triangleright^* \mu\alpha.M[\alpha \Leftarrow \vec{A}]$

3 値呼び $\lambda\mu$ 計算の合流性

値呼び $\lambda\mu$ 計算の合流性は並行簡約の概念を導入することにより, 証明する. ここで我々が考える並行簡約は, 馬場, 廣川, 藤田によって [1] で用いられた並行簡約をさらに拡張したものである.

定義 3.1. (並行簡約)
(P1) $x \succ x$.
(P2) $M \succ M' \Rightarrow \lambda x.M \succ \lambda x.M'$
(P3) $M \succ M' \Rightarrow \Lambda t.M \succ \Lambda t.M'$
(P4) $M \succ M' \Rightarrow \mu\alpha.M \succ \mu\alpha.M'$
(P5) $M \succ M', N \succ N' \Rightarrow MN \succ M'N'$
(P6) $M \succ M' \Rightarrow M\sigma \succ M'\sigma$
(P7) $M \succ M' \Rightarrow [\alpha]M \succ [\alpha]M'$
(P8) $M \succ M', V \succ V'$
$\Rightarrow (\lambda x.M)V \succ M'[x := V']$
(P9) $V \succ V', x \notin FV(V) \Rightarrow \lambda x.Vx \succ V'$
(P10) $M \succ M' \Rightarrow (\Lambda t.M)\sigma \succ M'[t := \sigma]$
(P11) $M \succ M', \alpha \notin FV(M)$
$\Rightarrow \mu\alpha.[\alpha]M \succ M'$
(P12) $M \succ M', \vec{A} \succ \vec{A}'$
$\Rightarrow (\mu\alpha.M)\vec{A} \succ \mu\alpha.M'[\alpha \Leftarrow \vec{A}']$.
(P13) $V \succ V', \vec{A} \succ \vec{A}'$
$\Rightarrow [\alpha]((\mu\beta.V)\vec{A}) \succ V'[\beta \Leftarrow \vec{A}'][\beta := \alpha]$.

ここで, $\vec{A} \succ \vec{A}'$ は, 列 $\vec{A}, \vec{A}'$ の各要素 A_i, A'_i について, $A_i \succ A'_i$ であることを表す.

この並行簡約は, 次の性質を満たす.

補題 3.2.
$M \succ M_1$ かつ $M \succ M_2$ ならば, $M_1 \succ M_3$ かつ $M_2 \succ M_3$ であるような M_3 が存在する.

[1] では並行変換を用いて, 多相型を含まず, さらに簡約規則として $(\eta_v), (\mu\eta)$ を含まない値呼び $\lambda\mu$ 計算の合流性を証明しているが, このとき用いられた並行変換は (P1), (P2), (P4), (P5), (P7), (P8), (P13) および

(P12') $M \succ M', A \succ A'$
$\Rightarrow (\mu\alpha.M)A \succ \mu\alpha.M'[\alpha \Leftarrow A']$

によって定義される. この並行簡約の重要な点は, (P13) によって, 連続した構造簡約と, それに続く 1 回の名前替えを, 併せて 1 ステップの並行簡約と見なしていることである.

しかし, シンプリフィケーション $(\mu\eta)$ を含む体系では, 並行変換を (P12') によって定義すると, 上の補題が成立しない. 例えば,

$M \equiv \mu\alpha_0.[\alpha_0](\mu\alpha_1.x)\vec{A}$

は, 1 ステップの並行簡約によって $\mu\alpha_0.x$ および $(\mu\alpha_1.x)\vec{A}$ に変換されるが, (P12') によって並行簡約を定義した場合, この 2 項は 1 ステップでは合流しない.

値呼び $\lambda\mu$ 計算の合流性は, 上の補題から直ちに証明される.

定理 3.3. (値呼び $\lambda\mu$ 計算の合流性)
$\lambda\mu$ 項 M が M_1 および M_2 へ簡約されるならば, M_1 および M_2 から簡約される共通の $\lambda\mu$ 項 M_3 が存在する.

4 値呼び $\lambda\mu$ 計算の強正規化性

値呼び $\lambda\mu$ 計算の強正規化性は, $\lambda\mu$ 項から λ 項への変換である CPS 変換を導入し, λ 計算の強正規化性に帰着することによって証明する.

ここで我々が用いる CPS 変換は, [3], [8], [9] などにおいて modified CPS-translation と呼ばれている変換に相当するもので, 型付け可能性, および簡約関係を保存するという性質を持つ.

以下では, $\lambda 2$ を domain-free スタイルの 2 階 λ 計算とし, K, L などで $\lambda 2$ 項を表す.

定義 4.1. (CPS 変換)
以下では $\overline{\overline{M}}$, $M : K$, $\Phi(V)$ および t^q を同時に定義する. $\overline{\overline{M}}$ を $\lambda\mu$ 項 M の CPS 変換と呼ぶ.

(1) $\overline{\overline{M}} \equiv \lambda k.(M : k)$ (k は新しい λ 変数)

(2) $V : K \equiv K\Phi(V)$

$\mu\alpha.M : K \equiv (M : I)[\alpha := K]$

$VU : K \equiv \Phi(V)\Phi(U)K$

$MU : K \equiv M : \lambda m.m\Phi(U)K$

$VN : K \equiv N : \lambda n.\Phi(V)nK$

$MN : K \equiv M : \lambda m.(N : \lambda n.mnK)$

$V\sigma : K \equiv \Phi(V)\sigma^q K$

$M\sigma : K \equiv M : \lambda m.m\sigma^q K$

(m, n は新しい λ 変数, $I \equiv \lambda x.x$.)

(3) $\Phi(x) \equiv x$

$\Phi(\lambda x.M) \equiv \lambda x.\overline{\overline{M}}$

$\Phi(\Lambda t.M) \equiv \Lambda t.\overline{\overline{M}}$

$\Phi([\alpha]M) \equiv M : \alpha$

(4) $t^q \equiv t$

$\perp^q \equiv \perp$

$(\sigma \to \tau)^q \equiv \sigma^q \to \neg\neg\tau^q$

$(\forall t.\sigma)^q \equiv \forall t.\neg\neg\sigma^q$

この CPS 変換は型付け可能性を保存する.

命題 4.2.
$\lambda\mu$ 項 M, 型 σ, 文脈 Γ, Δ に対し, $\lambda\mu$ 計算の型理論において $\Gamma; \Delta \vdash M : \sigma$ が成り立つならば, $\lambda 2$ の型理論において, $\Gamma^q, \neg\Delta^q \vdash \overline{\overline{M}} : \neg\neg\sigma^q$ が成り立つ.

この CPS 変換は簡約関係 $\rhd$ を保存するが, 狭義の簡約関係 $\rhd^+$ は保存しない. すなわち, $M \rhd N$ かつ $\overline{\overline{M}} \equiv \overline{\overline{N}}$ となる $\lambda\mu$ 項 M, N が存在する. この理由は, 一部の構造簡約の基が CPS 変換の過程で簡約されるからであり, またそれによって, 一部の部分項の情報が CPS 変換によって失われるからである. 例えば,

$\overline{\overline{(\mu\alpha.x)(Iy)}} \equiv \overline{\overline{(\mu\alpha.x)y}}$

であるが, これは CPS 変換 $\overline{\overline{(\mu\alpha.x)M}}$ を計算する過程で構造簡約 $(\mu\alpha.x)M \rhd \mu\alpha.x$ 相当の簡約が行われるために, M の情報が失われるからである.

そこで, $\lambda\mu$ 計算の狭義簡約関係のうち, CPS 変換によって保存されるもののクラスを明らかにする.

以下, $M \subset N$ によって, M が N の部分項であることを表す.

定義 4.3.
(1) $\lambda\mu$ 項 M が消去因子であるとは, 新しい λ 変数 x に対して $x \notin FV(M : x)$ であることを言う.

(2) $N \subset_i M$ を M に関して帰納的に定義する.

(i) $N \subset_i M$ ならば, $N \subset_i \lambda x.M$.

(ii) $N \subset_i M$ ならば, $N \subset_i \Lambda t.M$.

(iii) $N \subset_i M$ ならば, $N \subset_i \mu\alpha.M$.

(iv) $N \subset_i M$ ならば, $N \subset_i [\alpha]M$.

(v) $N \subset_i M$ ならば, $N \subset_i M\sigma$.

(vi) M_1 が消去因子のとき. $N \subset_i M_1$ または $N \subset M_2$ ならば, $N \subset_i M_1M_2$.

(vii) M_1 が値で M_2 が消去因子のとき. $N \subset M_1$ または $N \subset_i M_2$ ならば, $N \subset_i M_1M_2$.

(viii) (vi), (vii) 以外のとき. $N \subset_i M_1$ または $N \subset_i M_2$ ならば, $N \subset_i M_1M_2$.

(3) $N \subset M$ かつ $N \subset_i M$ でないとき, $N \subset_e M$ とする.

次に, $\lambda\mu$ 計算の簡約を分類する. 以下では, $\rhd_\mu$ は構造簡約を, $\rhd_{s\lambda}$ は構造簡約以外の簡約を表すとする.

定義 4.4.
(1) $M \rhd N$ とし, M 中の簡約基を R とする. $R \subset_e M$ のとき $M \rhd^e N$ とし, $R \subset_i M$ のとき $M \rhd^i N$ とする.

(2) 簡約 $M \rhd N$ を簡約基 $R \equiv (\mu\alpha.P)Q$ の構造簡約であるとする. P が $[\alpha]V$ (V は値) の形の部分項を含むとき $M \rhd_{\mu^+} N$ とし, それ以外のとき $M \rhd_{\mu^-} N$ とする.

(3) $M \rhd_{\mu^+} N$ とする. P 中の $[\alpha]V$ の形をした全ての部分項について $[\alpha]V \subset_e P$ であるとき,

$M \rhd_{\mu_e^+} N$ とする．それ以外のとき, $M \rhd_{\mu_i^+} N$ とする．

この分類によって, 狭義簡約関係のうち CPS 変換によって保存されるもののクラスが, 次の命題の通り, 明らかになる．

命題 4.5.
$M \rhd^e_{s\lambda} N$ または $M \rhd^e_{\mu_e^+} N$ ならば $\overline{\overline{M}} \rhd^+ \overline{\overline{N}}$ であり, $M \rhd^e_{\mu_i^+} N$ または $M \rhd^e_{\mu^-} N$ または $M \rhd^i N$ ならば $\overline{\overline{M}} \equiv \overline{\overline{N}}$ である．

この結果を用いて値呼び $\lambda\mu$ 計算の強正規化性を示す．このためには, 次の補題を示せば充分である．

補題 4.6.
規則 (β_v), (β_t), (μ) のみから得られる簡約 $\rhd_{\lambda\mu}$ について, 型付け可能な項は強正規化可能である．

以下, この補題を証明する．

定義 4.7. (増幅項)
$\lambda\mu$ 項 M の増幅項とは, M 中の $\mu\alpha.P$ の形の部分項を全て

$\mu\alpha.(\lambda z.P')([\alpha]Q)$

に置き換えたものとする．ここで, z は新しい λ 変数, P' は P の増幅項, Q は消去因子を含まない任意の項とする．

補題 4.8.
(1) $\lambda\mu$ 項が型付け可能ならば, その増幅項で型付け可能なものが存在する．
(2) 任意の増幅項 M とその部分項 N に対し, $N \subset_e M$ である．
(3) M' が M の増幅項であり, $M \rhd_{\lambda\mu} N$ ならば, N の増幅項 N' で $M' \rhd_{\lambda\mu} N'$ なるものが存在する．

この補題により, $\rhd_{\lambda\mu}$ の無限簡約列から, その増幅項を取ることによって, $\rhd^e_{s\lambda}$, $\rhd^e_{\mu_e^+}$, $\rhd^e_{\mu^-}$ のみからなる無限簡約列が得られる．さらに各項の CPS 変換を考えることによって $\lambda 2$ の簡約列が得られるが, $\rhd_{\mu^-}$ が強正規化可能であることより, この列は無限列となり, $\lambda 2$ の強正規化性に対して矛盾が得られる．
以上で, $\rhd_{\lambda\mu}$ の強正規化性が証明され, したがって値呼び $\lambda\mu$ 計算の強正規化性が証明される．

定理 4.9. (値呼び $\lambda\mu$ 計算の強正規化性)
$\lambda\mu$ 項 M が型付け可能ならば, M から始まる無限簡約列は存在しない．

5 まとめ

従来, CPS 変換を用いた強正規化性の証明として, 厳密に正しいものは存在しなかったが, 我々の方法を用いれば, 値呼び $\lambda\mu$ 計算の強正規化性は, CPS 変換を用いた方法によって証明される．この方法、特に増幅項に相当する概念は, [8] の $\lambda\mu$ 計算や, [4] のシステムに対しても適用することができる．
全ての狭義簡約関係を保存する CPS 変換は, 強正規化性の証明に関してだけでなく, $\lambda\mu$ 計算の計算体系としての性質を考える上で興味深い．今後はこのような CPS 変換を, その存在性を含め, 考える．

References

[1] K. Baba, S. Hirokawa and K. Fujita, Parallel Reduction in Type Free $\lambda\mu$-Calculus, *Proceedings of 7th Asian Logic Conference* (1999).

[2] G. Barthe and M. H. Sørensen, Domain-Free Pure Type Systems, *Lecture Notes in Computer Science* **1234** (1997) 9-20.

[3] P. de Groote, A CPS-translation for the $\lambda\mu$-calculus, *Lecture Notes in Computer Science* **787** (1994) 85-99.

[4] P. de Groote, A Simple Calculus of Exception Handling, *Lecture Notes in Computer Science* **902** (1995) 201-215.

[5] K. Fujita, Explicitly Typed $\lambda\mu$-Calculus for Polymorphism and Call-by-Value, *Lecture Notes in Computer Science* **1581** (1999).

[6] C. -H. L. Ong and C. A. Stewart, A Curry-Howard Foundation for Fuctional Computation with Control, *Proc. 24th Annual ACM symposium of Principles of Programming Languages*, 1997.

[7] M. Parigot, $\lambda\mu$-Calculus: An Algorithmic Interpretation of Natural Deduction, *Lecture Notes in Computer Science* **624** (1992) 190-201.

[8] M. Parigot, Proofs of Strong Normalization for Second Order Classical Natural Deduction, *Journal of Symbolic Logic* **62** (4) (1997) 1461-1479.

[9] G. D. Plotkin, Call-by-Name, Call-by-Value and the λ-calculus, *Theoretical Computer Science* **1** (1975) 125-159.