置換簡約を含むラムダ計算の合流性

中澤 巧爾（京都大学）　　藤田 憲悦（群馬大学）

こんな話です

permutative conversion [Prawtiz65?]

目標：**置換簡約**を含むラムダ計算の合流性を**簡単に**証明したい

（自然演繹古典一階述語論理の合流性[Ando05]を簡単に証明したい）

アイディア：**Z定理**[Dehornoy+08]を合成写像に対して適用

結論：Z定理を使うと、合流性を「モジュラーっぽく」証明できる！

$\lambda_{\beta\pi}$

紙面節約のため

直観主義自然演繹 + unaryな「または」

項： $t,u ::= x \mid \lambda x.t \mid tu \mid \iota\, t \mid t[x.u]$

除去子： $e ::= t \mid [x.u]$　　case t with $\iota x \to u$

簡約規則：

$(\beta_\to)$　$(\lambda x.t)u \to t[x:=u]$

$(\beta_\vee)$　$(\iota\, t)[x.u] \to u[x:=t]$

置換簡約　(π)　$t[x.u]e \to t[x.ue]$

Z定理 [Dehornoy+08, Komori+13]

抽象書換え系 (A,→) は、次のZ性を満たす

A上の写像 $(\cdot)^\circ$ が存在すれば合流する

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[dl, dashed, "*"] \\ a^\circ \arrow[r, dashed, "*"] & b^\circ \end{tikzcd}$$

（並行簡約を使わずに合流性が証明できる）

何が難しいのですか？

並行簡約の定義はさらに困難… [Ando05]

素朴なcomplete developmentの定義ではダメ！

問題1

$$\begin{tikzcd} & t[x.u][y.v]e \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \boxed{t[x.u[y.v]]e} \arrow[d, "\pi"] & & \boxed{t[x.u][y.ve]} \arrow[ddl, "\pi"] \\ t[x.u[y.v]e] \arrow[dr, "\pi"] & & \\ & t[x.u[y.ve]] & \end{tikzcd}$$

1ステップで分岐した先は
$(t[x.u][y.v]e)^\circ$ で合流
↓
πは一気につぶす

問題2

$$\begin{tikzcd} (\iota\,(x[y.y]))[z.z]e \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "(\cdot)^\circ"', "?"] & (\iota\,(x[y.y]))[z.ze] \arrow[d, "(\cdot)^\circ"] \\ x[y.y]e^\circ \arrow[r, "*"] & x[y.y]e^\circ \end{tikzcd}$$

βの結果できるπ簡約基はつぶさない

こうやって解決してみました

$(\cdot)^\circ$ を合成写像 $(\cdot)^{PB}=((\cdot)^P)^B$ として定義

「まずπを片付けてからβをつぶす」

$(\lambda x.t)^P = \lambda x.t^P$　　$((\lambda x.t)u)^B = t^B[x:=u^B]$

$(te)^P = t^P @ e^P$　　$((\iota\, t)[x.u])^B = u^B[x:=t^B]$

…　　$(te)^B = t^B e^B$ (o.w.)

$(t[x.u])@e = t[x.u@e]$　　…

PBのZ性を「モジュラーっぽく」証明

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\pi"] & b \arrow[dl, dashed, "*"] \\ a^P \arrow[r, dashed, "*"] \arrow[d, dashed, "*"] & b^P \\ a^{PB} \arrow[r, dashed, "*"] & b^{PB} \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\beta"] & b \arrow[ddl, dashed, "*"] \\ a^P \arrow[r, dashed, "*"] & b^P \\ a^{PB} \arrow[r, dashed, "*"] & b^{PB} \end{tikzcd}$$

PBはZ性を満たす、ゆえにZ定理より、$\lambda_{\beta\pi}$は合流性を満たす

結構使えそうです

実はちょっと面倒

$\lambda_{\beta\pi}$	πを一気につぶす	βをつぶす
$\lambda_{\beta\eta}$：外延的λ計算	ηをつぶす	βをつぶす
$\lambda\mu + \pi$：自然演繹古典一階述語論理	πとμを一気につぶす	βをつぶす
λ_x：λ + 明示的代入	代入をメタ化	βをメタ代入でつぶす