

# 置換簡約を含むラムダ計算の合流性

中澤 巧爾 (京都大学)

藤田 憲悦 (群馬大学)

## こんな話です

permutative conversion [Prawtitz65?]

目標: **置換簡約**を含むラムダ計算の合流性を**簡単に**証明したい

(自然演繹古典一階述語論理の合流性[Ando05]を簡単に証明したい)

アイデア: **Z定理**[Dehornoy+08]を合成写像に対して適用

結論: Z定理を使うと、合流性を「モジュラーっぽく」証明できる!

## $\lambda \beta \pi$

紙面節約のため

直観主義自然演繹 + unaryな「または」

項:  $t, u ::= x \mid \lambda x.t \mid tu \mid \iota t \mid t[x.u]$

除去子:  $e ::= t \mid [x.u]$

case  $t$  with  $\iota x \rightarrow u$

簡約規則:  $(\beta \rightarrow) \quad (\lambda x.t)u \rightarrow t[x:=u]$

$(\beta \vee) \quad (\iota t)[x.u] \rightarrow u[x:=t]$

置換簡約

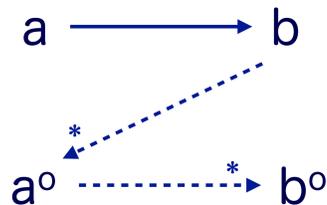
$(\pi) \quad t[x.u]e \rightarrow t[x.ue]$

## Z定理

[Dehornoy+08, Komori+13]

抽象書換え系  $(A, \rightarrow)$  は、次のZ性を満たす

A上の写像  $(\cdot)^\circ$  が存在すれば合流する



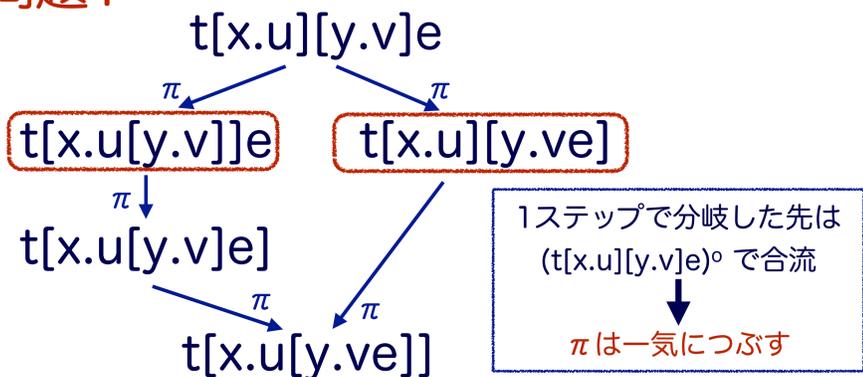
(並行簡約を使わずに合流性が証明できる)

並行簡約の定義はさらに困難... [Ando05]

## 何が難しいのですか?

素朴なcomplete developmentの定義ではダメ!

### 問題1



### 問題2

$$(\iota(x[y.y]))[z.z]e \xrightarrow{\pi} (\iota(x[y.y]))[z.ze]$$



## こうやって解決してみました

$(\cdot)^\circ$  を合成写像  $(\cdot)^{PB} = ((\cdot)^P)^B$  として定義

「まず  $\pi$  を片付けてから  $\beta$  をつぶす」

$$(\lambda x.t)^P = \lambda x.t^P \quad ((\lambda x.t)u)^B = t^B[x:=u^B]$$

$$(te)^P = t^P @ e^P \quad ((\iota t)[x.u])^B = u^B[x:=t^B]$$

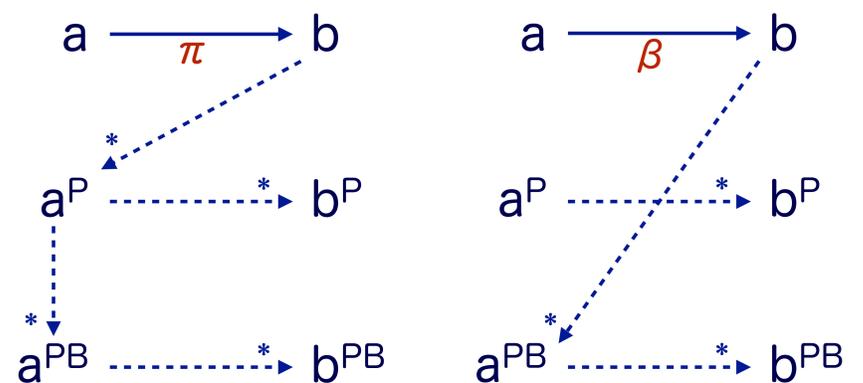
...

$$(te)^B = t^B e^B \quad (\text{o.w.})$$

$$(t[x.u])@e = t[x.u@e]$$

...

PBのZ性を「モジュラーっぽく」証明



**PBはZ性を満たす、ゆえにZ定理より、 $\lambda \beta \pi$ は合流性を満たす**

## 結構使えそうです

実はちょっと面倒

$\lambda \beta \pi$

$\lambda \beta \eta$ : 外延的  $\lambda$  計算

$\lambda \mu + \pi$ : 自然演繹古典一階述語論理

$\lambda_x$ :  $\lambda$  + 明示的代入

$\pi$  を一気につぶす

$\eta$  をつぶす

$\pi$  と  $\mu$  を一気につぶす

代入をメタ化

$\beta$  をつぶす

$\beta$  をつぶす

$\beta$  をつぶす

$\beta$  をメタ代入でつぶす