古典論理に対する汎用的自然演繹の証明正規化

福井 康介，石井 沙織，中澤 巧爾，結縁 祥治

名古屋大学大学院情報学研究科

{fukuin.gospel,sishii,knak,yuen}@sqlab.jp

概 要　Geuvers らによって提案された汎用的自然演繹 (truth-table natural deduction) は，任意の結合子についてその真理値表から機械的に推論規則を導出する枠組みであり，一般的でない結合子に対しても推論規則を構成することができるという利点がある．Geuvers らは，直観主義論理および古典論理に対応する汎用的自然演繹の体系として $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ と $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ を提案した．さらに，van der Giessen らは $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ に対する証明正規化を定義し，部分論理式性と強正規化性を示すことにより，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の基本的性質である無矛盾性や決定可能性を証明している．しかし，$\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ に対する証明正規化については未だ議論されていない．実際，$\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ に対して部分論理式性などの良い性質をもつ証明正規化の概念を定義することは困難であると考えられる．そこで本論文では，古典論理に対する新たな汎用的自然演繹として $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ とその証明正規化を提案する．$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ は $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の拡張であり，Parigot の古典自然演繹の要領で結論に複数の論理式を認めるようにしたものである．このため，Parigot の古典自然演繹にカリー・ハワード対応するラムダ・ミュー計算のアイディアを用いれば $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の証明正規化を自然に定義することができる．本論文では，$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ が証明可能性の意味で $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ と同等であることを示し，その証明正規化について部分論理式性と強正規化性を示す．これらの結果より，$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の無矛盾性や保守性などの基本的な性質が得られる．$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性は，van der Giessen による $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性と同様に CPS 変換を用いて証明されるが，既存の証明の単純な拡張では証明できない．本論文では，Ikeda らによる CGPS 変換を用いて $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性を証明する．

1　はじめに

Geuvers ら [3, 4] によって提案された**汎用的自然演繹**（**truth-table natural deduction**）は，任意の論理結合子に対してその真理値表から自然演繹の推論規則を導出する枠組みであり，一般的ではない論理結合子に対しても推論規則を構成できるという利点をもつ．汎用的自然演繹は各論理結合子について，真理値表において値が偽になる各行に対して一つの除去規則を，値が真になる各行に対して一つの導入規則を与える．Geuvers と van der Giessen らは，直観主義論理と古典論理に対する汎用的自然演繹の体系 $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ と $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ を与えており，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ は，与えられた真理値表によって各可能世界における真理値を定めた直観主義 Kripke 意味論に対して健全かつ完全であること [3]，また，$\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ は二値の古典意味論に対して健全かつ完全であること [12] が証明されている．

Prawitz [11] により提案された自然演繹の**証明正規化**は，シーケント計算におけるカット除去に対応する概念である．証明に対して適当な正規形を定義することにより，自然演繹体系の基本的な性質である無矛盾性や保守性，決定可能性などを帰結することができる．ここで，正規化に期待される性質は，**主部簡約性**，**部分論理式性**，および，**（弱）正規化可能性**の三つの性質である．主部簡約性は，正規化の手続きによって結論が変化しないことを保証する性質である．部分論理式性は，正規な証明中に現れる任意の論理式が，証明の結論の部分論理式であるという性質である.（弱）正規化可能性は，任意の証明は同じ結論をもつ正規な証明をもつという性質である．

Geuvers ら [4] は，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ に対する証明正規化を定義し，van der Giessen ら [12, 5] は，その部分論理式性と強正規化性を証明している．強正規化性は，証明正規化の手続が必ず停止することを保証するもので，正規化可能性を帰結する強い性質である．しかし，彼ら自身が述べているとおり [12, 5],

古典論理の汎用的自然演繹 $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ に対して証明正規化の概念を定義することは未解決の問題となっている．

そこで本論文では，古典論理に対する新しい汎用的自然演繹である $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ を提案する．$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ は，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の拡張であり，Parigot の古典自然演繹 [9] の要領で，結論に複数の論理式を許したものである．古典自然演繹の証明正規化とラムダ・ミュー計算の間のカリー・ハワード同型対応を参考にすれば，$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の証明正規化を自然に定義することができる．本論文では $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ とその証明正規化について以下の事を証明する．(1) 証明可能性の意味で $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ と $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ は同等である．(2) $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ は主部簡約性を満たす．すなわち，M が $\Gamma \vdash A; \Delta$ の証明を表す項であり，M が N に簡約されるとき，N は $\Gamma \vdash A; \Delta$ の証明を表す項である．(3) $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の正規な証明は部分論理式性を満たす．すなわち，仮定付判断 $\Gamma \vdash A; \Delta$ の正規な証明に出現する任意の論理式は Γ，A，Δ いずれかの部分論理式である．(4) $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の証明正規化を与える簡約関係は強正規化性を満たす．これらの性質は直ちに $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の基本的性質である無矛盾性と保守性を導く．とくに保守性は，論理結合子の拡張が証明可能性に影響を及ぼさないことを保証する性質であり，汎用的自然演繹のような枠組みにおいて重要な性質である．これらの無矛盾性と保守性は，(1) の同等性により $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ でも成り立つことが分かる．ちなみに，先行研究では $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の保守性について述べられていないが，証明正規化を用いれば本論文と同様に証明することが可能である．

$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性は，**継続渡し形式変換（CPS 変換）**を用いた方法で証明する．CPS 変換はプログラム変換の一つであるが，カリー・ハワード対応を通して見ることにより，論理式上の否定変換に対応する証明変換であると考えることができる．とくに，強正規化性が既知であるような計算体系への CPS 変換として，型付け可能性と，狭義の簡約関係（1 ステップ以上の簡約関係）を保存するものを与えることにより強正規化性を証明する手法は広く用いられている [1, 8, 6, 2].

van der Giessen ら [12, 5] による $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性の証明においても CPS 変換のアイディアが用いられている．素朴な変換では，継続の一部が変換の途中で消滅してしまうため，狭義の簡約関係が保存されない，という継続消滅の問題が発生する [8, 6]．この問題を回避するために，彼女らは除去規則の形によって継続消滅の有無を場合分けし，CPS 変換を別途定義することによって証明している．さらに，彼女らの CPS 変換は，置換簡約と呼ばれる種類の簡約については狭義の簡約関係を保存しないため，置換簡約のみに対する強正規化性を別途証明している [4].

しかし，$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ においては既存の場合分けのアイディアは利用できない．そこで，本論文では継続消滅に対する一般的な解決方法である Ikeda ら [6] による **CGPS 変換**のアイディアを用いる．CGPS 変換では変換中に出現する全ての継続を，計算的に意味をもたない「ゴミ部」に累積することにより狭義簡約関係を保存することができる．さらに，CGPS 変換においては，置換簡約が「ゴミ捨て」の簡約ステップとして保存されるため，置換簡約単体の強正規化性を証明する必要がなく，証明は既存のものよりも簡潔なものになる．実際，CGPS 変換のアイディアは $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ に対しても適用することが可能であり，置換簡約に対する複雑な議論が不要であるという意味で，既存のもの [12, 5] より簡潔な別証明を与えることができる．

本論文の構成は以下のとおりである．2 章では汎用的自然演繹 $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$，$\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ を定義し，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ に対する証明正規化を与える．3 章では本論文で提案する $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ と，その証明正規化を定義する．4 章では先行研究である van der Giessen らによる $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性の CPS 変換を用いた証明について概説する．5 章では $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性を CGPS 変換を用いて証明する．6 章では本論文のまとめと今後の課題について議論する．

2 汎用的自然演繹

2.1 $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ と $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$

本章では Geuvers ら [3] による，汎用的自然演繹 $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ と $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ を定義する．ここで，$\mathcal{C}$ は論理結合子の集合である．各 $c \in \mathcal{C}$ は定まったアリティ n と，真理値表 t_c をもつとする．真理値は 0（偽）と 1（真）で表し，$\mathbb{B} = \{0, 1\}$ とする．アリティ n の結合子 c に対する真理値表 t_c は，$\mathbb{B}^n$ から $\mathbb{B}$ への関数で与えられているとする．

定義 2.1 (汎用的自然演繹の論理式と仮定付判断) 結合子集合 $\mathcal{C}$ 上の論理式は以下で定義される．

$$A ::= p \mid c(A_1, \cdots, A_n)$$

ここで，p は命題変数，c のアリティは n とする．論理式の集合 Γ と論理式 A について，$\Gamma \vdash A$ を仮定付判断と呼ぶ．集合 $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_m\}$ に対して，$\Gamma \vdash A$ を単に $A_1, \ldots, A_m \vdash A$ と書き，Γ が空のときは単に $\vdash A$ と書く．また，Γ_1 と Γ_2 の集合和を Γ_1, Γ_2 で表し，とくに $\Gamma_2 = \{A\}$ のとき，この集合和を Γ_1, A と書く．

定義 2.2 (汎用的自然演繹の推論規則) アリティ n の結合子 c に対する推論規則を以下で定義する．ここで，$\vec{b}$ は列 $b_1, \ldots, b_n$ を表し，各 b_i は $\mathbb{B}$ の要素とする．また，$\vec{A} = A_1, \ldots, A_n$ は論理式の列を表す．

1. 公理 ax

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \mathsf{ax}$$

2. 除去規則 $\mathsf{el}^c(\vec{b})$（D は任意の論理式）

$$\frac{\Gamma \vdash c(\vec{A}) \quad \cdots \quad \overset{(b_i = 1\text{ のとき})}{\Gamma \vdash A_i} \quad \cdots \quad \overset{(b_j = 0\text{ のとき})}{\Gamma, A_j \vdash D} \quad \cdots}{\Gamma \vdash D}\ \mathsf{el}^c(\vec{b})$$

3. 直観主義論理の導入規則 $\mathsf{in}^c(\vec{b})$

$$\frac{\cdots \quad \overset{(b_i = 1\text{ のとき})}{\Gamma \vdash A_i} \quad \cdots \quad \overset{(b_j = 0\text{ のとき})}{\Gamma, A_j \vdash c(\vec{A})} \quad \cdots}{\Gamma \vdash c(\vec{A})}\ \mathsf{in}^c(\vec{b})$$

4. 古典論理の導入規則 $\mathsf{inC}^c(\vec{b})$（D は任意の論理式）

$$\frac{\Gamma, c(\vec{A}) \vdash D \quad \cdots \quad \overset{(b_i = 1\text{ のとき})}{\Gamma \vdash A_i} \quad \cdots \quad \overset{(b_j = 0\text{ のとき})}{\Gamma, A_j \vdash D} \quad \cdots}{\Gamma \vdash D}\ \mathsf{inC}^c(\vec{b})$$

定義 2.3 ($IPC_{\mathcal{C}}$ と $CPC_{\mathcal{C}}$[3]) *1.* $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ は以下の推論規則からなる．

- 公理 ax.
- $t_c(\vec{b}) = 0$ となる各 $c \in \mathcal{C}$ と $\vec{b}$ に対して，除去規則 $\mathsf{el}^c(\vec{b})$.
- $t_c(\vec{b}) = 1$ となる各 $c \in \mathcal{C}$ と $\vec{b}$ に対して，直観主義論理の導入規則 $\mathsf{in}^c(\vec{b})$.

2. $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ は以下の推論規則からなる．

- 公理 ax.
- $t_c(\vec{b}) = 0$ となる各 $c \in \mathcal{C}$ と $\vec{b}$ に対して，除去規則 $\mathsf{el}^c(\vec{b})$.
- $t_c(\vec{b}) = 1$ となる各 $c \in \mathcal{C}$ と $\vec{b}$ に対して，古典論理の導入規則 $\mathsf{inC}^c(\vec{b})$.

例 2.4 真理値表 $t_{\mathsf{xor}}(1,1) = t_{\mathsf{xor}}(0,0) = 0$，$t_{\mathsf{xor}}(1,0) = t_{\mathsf{xor}}(0,1) = 1$ をもつ結合子 xor を考える．$\mathrm{IPC}_{\{\mathsf{xor}\}}$ の公理以外の推論規則は以下の *4* つである．

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \mathsf{xor} A_2 \quad \Gamma \vdash A_1 \quad \Gamma \vdash A_2}{\Gamma \vdash D}\ \mathsf{el}^{\mathsf{xor}}(1,1) \qquad \frac{\Gamma \vdash A_1 \quad \Gamma, A_2 \vdash A_1 \mathsf{xor} A_2}{\Gamma \vdash A_1 \mathsf{xor} A_2}\ \mathsf{in}^{\mathsf{xor}}(1,0)$$

$$\frac{\Gamma, A_1 \vdash A_1 \mathsf{xor} A_2 \quad \Gamma \vdash A_2}{\Gamma \vdash A_1 \mathsf{xor} A_2}\ \mathsf{in}^{\mathsf{xor}}(0,1) \qquad \frac{\Gamma \vdash A_1 \mathsf{xor} A_2 \quad \Gamma, A_1 \vdash D \quad \Gamma, A_2 \vdash D}{\Gamma \vdash D}\ \mathsf{el}^{\mathsf{xor}}(0,0)$$

また，$\mathrm{CPC}_{\{\mathsf{xor}\}}$ では，上記の二つの導入規則が以下に置き換わる．

$$\frac{\Gamma, A_1 \mathsf{xor} A_2 \vdash D \quad \Gamma \vdash A_1 \quad \Gamma, A_2 \vdash D}{\Gamma \vdash D}\ \mathsf{inC}^{\mathsf{xor}}(1,0) \qquad \frac{\Gamma, A_1 \mathsf{xor} A_2 \vdash D \quad \Gamma, A_1 \vdash D \quad \Gamma \vdash A_2}{\Gamma \vdash D}\ \mathsf{inC}^{\mathsf{xor}}(0,1)$$

一般の $\mathcal{C}$ に対する汎用的自然演繹について，以下のとおり健全性と完全性が証明されている．

定理 2.5 ([3, 12]) *1.* $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ は，真理値表によって定義される直観主義 *Kripke* 意味論に対して健全かつ完全である．

2. $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ は，二値の古典意味論に対して健全かつ完全である．

2.2 $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の証明正規化

次に，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の証明正規化について解説する．ここでは Geuvers ら [4] に従ってカリー・ハワード同型対応のアイディアにもとづき，証明項上の簡約体系として証明正規化を記述するが，記法はやや異なる．とくに，[4] では各規則の上式を b_i の値に従ってソートして証明項を割当てているが，これでは各規則におけるインデックス i の対応関係が非常に分かりにくい．そのため，本論文では各規則の上式の順序を固定して定義する．

定義 2.6 ($\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ **の証明項)** $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の証明項 M を以下で定義する．

$$M ::= x \mid M \cdot_{\mathsf{el}^c(\vec{b})} [\vec{P}] \mid \{\vec{P}\}_{\mathsf{in}^c(\vec{b})} \qquad\qquad P ::= M \mid (x)M$$

ここで，x は項変数，$\vec{P}$ は列 $P_1, \ldots, P_n$ を表す． 推論規則名によるアノーテーションは，重要でない場合や文脈から明らかな場合は適宜省略する．変数 x は公理，$M \cdot [\vec{P}]$ は除去規則，$\{\vec{P}\}$ は導入規則に，それぞれ対応する証明項である．$(x)M$ の形の表現を抽象項と呼び，M 中の x の出現は束縛されているとする．束縛変数を名前換えした証明項は暗黙的に同一視する．また，$M \cdot [\vec{P}] \cdot [\vec{Q}]$ のような，連続する除去規則は左結合であるとする．$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の証明に対する証明項の割当てを以下のとおり定義する．ここで，$\Gamma \vdash M : A$ において Γ は変数付き論理式 $x : A$ の集合であり，条件「$x : A, x : B \in \Gamma$ ならば $A = B$」を常に満たすとする．

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A}\ \mathsf{ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : c(\vec{A}) \quad \cdots \quad \overset{(b_i = 1\ のとき)}{\Gamma \vdash N_i : A_i} \quad \cdots \quad \overset{(b_j = 0\ のとき)}{\Gamma, x_j : A_j \vdash N_j : D} \quad \cdots}{\Gamma \vdash M \cdot_{\mathsf{el}^c(\vec{b})} [\cdots N_i \cdots (x_j)N_j \cdots] : D}\ \mathsf{el}^c(\vec{b})$$

$$\frac{\cdots \quad \overset{(b_i = 1\ のとき)}{\Gamma \vdash N_i : A_i} \quad \cdots \quad \overset{(b_j = 0\ のとき)}{\Gamma, x_j : A_j \vdash N_j : c(\vec{A})} \quad \cdots}{\Gamma \vdash \{\cdots N_i \cdots (x_j)N_j \cdots\}_{\mathsf{in}^c(\vec{b})} : c(\vec{A})}\ \mathsf{in}^c(\vec{b})$$

定義 2.7 ($\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ **の証明正規化 [4])** $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の証明正規化は，以下の二つの β 規則と一つの π 規則で定義される．

$$\{\cdots M_i \cdots\}_{\mathsf{in}^c(\vec{b})} \cdot_{\mathsf{el}^c(\vec{b'})} [\cdots (x_i)N_i \cdots] \mapsto_\beta N_i[x_i := M_i] \qquad (b_i = 1\ かつ\ b'_i = 0\ のとき)$$

$$\{\cdots (x_i)M_i \cdots\}_{\mathsf{in}^c(\vec{b})} \cdot_{\mathsf{el}^c(\vec{b'})} [\cdots N_i \cdots] \mapsto_\beta M_i[x_i := N_i] \cdot_{\mathsf{el}^c(\vec{b'})} [\cdots N_i \cdots] \qquad (b_i = 0\ かつ\ b'_i = 1\ のとき)$$

$$(M \cdot_{\mathsf{el}^c(\vec{b})} [\cdots (x)N \cdots]) \cdot_{\mathsf{el}^{c'}(\vec{b'})} [\vec{Q}] \mapsto_\pi M \cdot_{\mathsf{el}^c(\vec{b})} [\cdots (x)N \cdot_{\mathsf{el}^{c'}(\vec{b'})} [\vec{Q}] \cdots]$$

ここで，β 規則の右辺の $M[x := N]$ は通常の変数束縛を回避する方法で定義された項の代入であり，π 規則の右辺の $[\cdots(x)N\cdot_{\mathsf{el}^{c'}(\vec{b'})}[\vec{Q}]\cdots]$ は，$[\cdots(x)N\cdots]$ 中の全ての抽象項 $(x)N$ を $(x)N\cdot_{\mathsf{el}^{c'}(\vec{b'})}[\vec{Q}]$ で置換したもの（それ以外は変えない）を表している．関係 $M \to N$ は，M 中のある部分項を上記の規則に従って書換えた結果が N であることとする．このとき，M 中の規則の左辺の形をした部分項のことを簡約基とぶ．$\to^+$ と $\to^*$ はそれぞれ $\to$ の推移的閉包，および，反射的推移的閉包とする．とくに β 規則や π 規則のいずれか一方のみを用いている場合を，$\to_\beta$ や $\to_\pi^*$ などで表す．$M \to N$ なる N が存在しないとき，M は $\beta\pi$ 正規であるという．

例 2.8 例 *2.4* の $\mathrm{IPC}_{\{\mathsf{xor}\}}$ の証明正規化は四つの β 規則をもつ．

$$\{M_1,(x_2)M_2\}_{\mathsf{in}^{\mathsf{xor}}(1,0)}\cdot_{\mathsf{el}^{\mathsf{xor}}(1,1)}[N_1,N_2] \mapsto_\beta M_2[x_2 := N_2]\cdot_{\mathsf{el}^{\mathsf{xor}}(1,1)}[N_1,N_2]$$
$$\{M_1,(x_2)M_2\}_{\mathsf{in}^{\mathsf{xor}}(1,0)}\cdot_{\mathsf{el}^{\mathsf{xor}}(0,0)}[(y_1)N_1,(y_2)N_2] \mapsto_\beta N_1[y_1 := M_1]$$

（残る二つは，$\mathsf{in}^{\mathsf{xor}}(0,1)$ に対する同様の規則である．）β 規則は証明の回り道（*detour*），すなわち導入された結合子をただちに除去するような部分を解消するものであり，例えば上の一つ目の規則は，

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdash A_1\end{array}\quad \begin{array}{c}\overline{A_2\vdash A_2}\\ \vdots\,\pi\\ A_2\vdash A_1\mathsf{xor}A_2\end{array}}{\vdash A_1\mathsf{xor}A_2}\,\mathsf{in}\quad \begin{array}{c}\vdots\\ \vdash A_1\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\,\pi'\\ \vdash A_2\end{array}}{\vdash D}\,\mathsf{el}
\quad\to_\beta\quad
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'\\ \vdash A_2\\ \vdots\,\pi\\ \vdash A_1\mathsf{xor}A_2\end{array}\quad \begin{array}{c}\vdots\\ \vdash A_1\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\,\pi'\\ \vdash A_2\end{array}}{\vdash D}\,\mathsf{el}
$$

という証明変形に対応している．

π 規則は以下のものである．

$$M\cdot_{\mathsf{el}^{\mathsf{xor}}(0,0)}[(y_1)N_1,(y_2)N_2]\cdot[\vec{P}] \mapsto_\pi M\cdot_{\mathsf{el}^{\mathsf{xor}}(0,0)}[(y_1)N_1\cdot[\vec{P}],(y_2)N_2\cdot[\vec{P}]]$$
$$M\cdot_{\mathsf{el}^{\mathsf{xor}}(1,1)}[N_1,N_2]\cdot[\vec{P}] \mapsto_\pi M\cdot_{\mathsf{el}^{\mathsf{xor}}(1,1)}[N_1,N_2]$$

π 規則は，連続する除去規則の順序を入れ換える規則であり，これにより除去規則によって簡約基が分断されているような β 簡約を行なうことができる．例えば，一つ目の規則において N_1 が導入規則のとき，$N_1\cdot[\vec{P}]$ は β 簡約基になる．

一般の論理結合子 c において，$\{\vec{P}\}_{\mathsf{in}^c(\vec{b})}\cdot_{\mathsf{el}^c(\vec{b'})}[\vec{Q}]$ の形の証明項は必ず β 簡約基になることに注意しよう．実際，$t_c(\vec{b}) = 1$ かつ $t_c(\vec{b'}) = 0$ なので，$\vec{b} \neq \vec{b'}$，すなわちある i において $b_i \neq b'_i$ となり，このインデックスにおいて β 簡約が可能である．

$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の証明正規化に関しては以下の事実が証明されている．

定理 2.9 ($\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ **の部分論理式性 [12]**) $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ における $\Gamma \vdash A$ の $\beta\pi$ 正規な証明中に現れる任意の論理式は，Γ または A の部分論理式である．

定理 2.10 ($\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ **の強正規化性 [12, 5]**) $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ において，無限 $\beta\pi$ 簡約列は存在しない．

強正規化性の証明については後の章で改めて詳細を解説する．

また，先行研究では明示的には証明されていないが，次も容易に確認できる．

定理 2.11 ($\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ **の主部簡約性**) $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ において $\Gamma \vdash M : A$ かつ $M \to N$ であるならば，$\Gamma \vdash N : A$ である．

$\Gamma \vdash A$ が $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ で証明可能であるとき，強正規化性と主部簡約性より，その正規な証明が存在することが分かり，さらにそれは部分論理式性を満たすことが分かる．これより以下の系がただちに帰結する．

系 2.12 (無矛盾性 [12]) $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ は無矛盾である．すなわち，証明不可能な仮定付判断が存在する．

また，これは先行研究では述べられていないことであるが，以下の重要な性質も，証明正規化によって簡単に分かる．

系 2.13 (保守性) $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ とし，Γ,A は $\mathcal{C}$ 上の論理式のみからなるとする．このとき，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ で $\Gamma \vdash A$ が証明可能であることと $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}'}$ で $\Gamma \vdash A$ が証明可能であることは同値である．

証明． $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}'}$ で $\Gamma \vdash A$ が証明可能ならば，正規な証明が存在する．部分論理式性より，正規な証明には $\mathcal{C}$ 中の結合子に関する規則しか現れないので，この証明は $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の証明になっている．逆は自明である．□

3 IPC^{μ}_{C}

前章で見たように，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ については既に性質のよい証明正規化の概念が与えられているが，$\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ の証明正規化については議論がなされていない．実際，古典論理の導入規則の形から，部分論理式性を満たすような正規形を定義することは困難であると考えられる．そこで，$\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ と等価で，かつ，証明正規化が定義できる体系として $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ を定義する．

3.1 $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ と証明正規化

$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ は IPC の仮定付判断の右辺に複数の論理式を認め，右辺に対する構造規則を加えたものである．これは，Parigot[9] の古典自然演繹のアイディアに従うものであり，その証明正規化はラムダ・ミュー計算の簡約と同様に与えることができる．

定義 3.1 ($\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$) $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の論理式は $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ と同じである．$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の仮定付判断は，$\Gamma \vdash A; \Delta$ の形の表現である．$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の推論規則は，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の推論規則をこの仮定付判断に拡張したもの，例えば，$t_c(\vec{b}) = 0$ である c と $\vec{b}$ に対する除去規則

$$\frac{\Gamma \vdash c(\vec{A}); \Delta \quad \cdots \quad \overset{(b_i = 1 \text{ のとき})}{\Gamma \vdash A_i; \Delta} \quad \cdots \quad \overset{(b_j = 0 \text{ のとき})}{\Gamma, A_j \vdash D; \Delta} \quad \cdots}{\Gamma \vdash D; \Delta}\ \mathsf{el}^c(\vec{b})$$

さらに，同様の拡張を施した公理と直観主義論理の導入規則，および以下の規則からなる．

$$\frac{\Gamma \vdash A; B, \Delta}{\Gamma \vdash B; A, \Delta}\ \mu_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A; A, \Delta}{\Gamma \vdash A; \Delta}\ \mu_2$$

$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の証明項は，追加された二つの規則に対して以下のように拡張される．

定義 3.2 ($\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の証明項) $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の証明項 M を以下で定義する．

$$M ::= x \mid M \cdot_{\mathsf{el}^c(\vec{b})} [\vec{P}] \mid \{\vec{P}\}_{\mathsf{in}^c(\vec{b})} \mid \mu\alpha.\beta M \qquad\qquad P ::= M \mid (x)M$$

ここで，α，β は項変数とは違う種類の変数（μ 変数と呼ぶ）であり，$\mu\alpha.\beta M$ の βM 中の α の出現は束縛されるとする．$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の証明に対する証明項の割当ては以下の通り定義される．公理，除去規則，導入規則に対しては $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の項割当てと同様である．ただし，対象となる判断 $\Gamma \vdash M : A;\, \Delta$ において Δ は μ 変数付き論理式 $\alpha : A$ の（多重ではない）集合とし，Γ の場合と同様，条件「$\alpha : A, \alpha : B \in \Delta$ ならば $A = B$」を常に満たすとする．推論規則 μ_1，μ_2 に対する項割当ては以下のとおりである．

$$\frac{\Gamma \vdash M : A;\ \beta : B, \Delta}{\Gamma \vdash \mu\beta.\alpha M : B;\ \alpha : A, \Delta}\ \mu_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A;\ \alpha : A, \Delta}{\Gamma \vdash \mu\alpha.\alpha M : A;\ \Delta}\ \mu_2$$

ラムダ・ミュー計算のときと同様，μ 変数に対する構造代入は以下のとおり定義される．

定義 3.3 (構造代入) $M[\alpha X := \alpha X \cdot [\vec{P}]]$ は，M 中の自由な α の出現 αN を $\alpha(N \cdot [\vec{P}])$ に置き換えて得られる項を表す．

$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}^{\mu}$ の証明正規化は，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の証明正規化の拡張として以下のように定義される．追加した推論規則に対する簡約規則は構造代入を用いて定義される．

定義 3.4 $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}^{\mu}$ の証明正規化は，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の β 規則，π 規則，および以下の μ 規則で定義される．

$$(\mu\alpha.\beta M) \cdot [\vec{P}] \mapsto_{\mu} \mu\alpha.(\beta M)[\alpha X := \alpha X \cdot [\vec{P}]]$$

$\to_{\mu}$ や $\to_{\mu}^{+}$ などは $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ のときと同様に定義される．$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}^{\mu}$ においては $\to$ によって *1* ステップの $\beta\pi\mu$ 簡約を表すとする．

証明図で表すと，μ 簡約は，以下のような変換に相当する．（ここでは，$\alpha \neq \beta$ のとき，すなわち，μ_1 規則を用いているときを挙げているが，μ_2 のときも同様である．）

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi \\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi' \\ \Gamma' \vdash A;\ C, \Delta'\end{array}}{\Gamma' \vdash C;\ \underline{A}, \Delta'}\ \mu_1 \\ \vdots\ \pi \\ \Gamma \vdash B;\ \underline{A}, \Delta\end{array}}{\Gamma \vdash A;\ \underline{B}, \Delta}\ \mu_1 \quad \cdots}{}}{\Gamma \vdash D;\ B, \Delta}\ \mathsf{el} \quad \to_{\mu} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi' \\ \Gamma' \vdash A;\ C, \Delta' \quad \cdots\end{array}}{\Gamma' \vdash D;\ C, \Delta'}\ \mathsf{el}}{\Gamma' \vdash C;\ \underline{D}, \Delta'}\ \mu_1 \\ \vdots\ \pi \\ \Gamma \vdash B;\ \underline{D}, \Delta\end{array}}{\Gamma \vdash D;\ \underline{B}, \Delta}\ \mu_1$$

ここで下線を引いた論理式が，α が割当てられている論理式である．すなわち，μ 規則によって Δ の部分から取り出された A に対して除去規則を適用している部分に対して，実際に A が導出された部分まで除去規則を移動（分配）するのが μ 規則である．これによって，π 規則のときと同様，μ 規則によって簡約基が分断されていた β 簡約を行なうことができるようになる．

3.2 $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}^{\mu}$ の証明正規化の性質

$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}^{\mu}$ の証明正規化は主部簡約性，部分論理式性，および，強正規化性を満たす．

定理 3.5 ($\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}^{\mu}$ の主部簡約性) $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}^{\mu}$ において，$\Gamma \vdash M : A; \Delta$ かつ $M \to N$ ならば，$\Gamma \vdash N : A; \Delta$ である．

証明． 簡約関係 $M \to N$ に関する帰納法により証明できる．□

定理 3.6 ($\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}^{\mu}$ の部分論理式性) $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}^{\mu}$ における $\Gamma \vdash A; \Delta$ の $\beta\pi\mu$ 正規な証明中に現れる任意の論理式は，Γ，A，Δ いずれかの部分論理式である．

証明． 証明に関する帰納法によって示される．例えば，簡約規則の定義より，$M \cdot [\vec{P}]$ が正規形であるとき M は項変数に限られるので，証明は以下の形をしている．

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, c(\vec{A}) \vdash c(\vec{A}); \Delta}\ \mathsf{ax} \quad \cdots \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_i \\ \Gamma, c(\vec{A}) \vdash A_i; \Delta\end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_j \\ \Gamma, c(\vec{A}), A_j \vdash D; \Delta\end{array} \quad \cdots}{\Gamma, c(\vec{A}) \vdash D; \Delta}\ \mathsf{el}$$

π_i 中の論理式 B は，帰納法の仮定より，$\Gamma, c(\vec{A}), A_i, \Delta$ の部分論理式であるが，A_i は $c(\vec{A})$ の部分論理式なので，B は $\Gamma, c(\vec{A}), \Delta$ の部分論理式である．π_j 中の論理式についても同様である．

公理，導入規則，μ_1，μ_2 に対しても同様に証明される．□

定理 3.7 ($\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ **の強正規化性**) 無限 $\beta\pi\mu$ 簡約列は存在しない．

この定理の証明は後の章で与える．

$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の場合と同様，これらの定理からただちに次が帰結する．

系 3.8 ($\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ **の無矛盾性**) $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ は無矛盾である．すなわち，証明不可能な仮定付判断が存在する．

系 3.9 ($\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ **の保守性**) $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ とし，Γ,A は $\mathcal{C}$ 上の論理式のみからなるとする．このとき，$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ で $\Gamma \vdash A$ が証明可能であることと $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}'}$ で $\Gamma \vdash A$ が証明可能であることは同値である．

3.3　$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ と $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ の同等性

$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ と $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ は証明可能性において以下の意味で同等である．

$\neg$ は真理値表として $t_{\neg}(b) = 1 - b$ をもつアリティ1 の論理結合子とする．

定理 3.10 ($\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ **と** $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ **の同等性**) *1.* $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ で $\Gamma \vdash A$ が証明可能ならば，$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ で $\Gamma \vdash A;$ が証明可能である．

2. $\neg \in \mathcal{C}$ とする．$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ で $\Gamma \vdash A; \Delta$ が証明可能ならば，$\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ で $\Gamma, \neg\Delta \vdash A$ が証明可能である．

証明.　いずれも導出に関する帰納法で証明できる．□

この同等性によって，無矛盾性と保守性は以下のように $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ でも成立することが分かる．

系 3.11 ($\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ **の無矛盾性**) $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ は無矛盾である．すなわち，証明不可能な仮定付判断が存在する．

証明.　$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ で証明できない $\Gamma \vdash A; \Delta$ を考える．$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ では右辺の弱化ができるので，$\Gamma \vdash A;$ も証明できない．よって，同等性より，$\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ で $\Gamma \vdash A$ は証明できない．□

系 3.12 ($\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ **の保守性**) $\neg \in \mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ とし，Γ,A は $\mathcal{C}$ 上の論理式のみからなるとする．このとき，$\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ で $\Gamma \vdash A$ が証明可能であることと $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}'}$ で $\Gamma \vdash A$ が証明可能であることは同値である．

証明.　$\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}'}$ で $\Gamma \vdash A$ が証明できるとすると，同等性より，$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}'}$ で $\Gamma \vdash A;$ が証明できる．$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の保守性よりこれは $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ でも証明できる．再び同等性より $\Gamma \vdash A$ は $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ で証明できる □

4　$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性の証明

本章では van der Giessen ら [12, 5] による $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性に対する CPS 変換を用いた証明について説明する．

証明の概要は，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の証明項から単純型付ラムダ計算への CPS 変換で，型付け可能性と狭義（1 ステップ以上）簡約関係を保存するものを与えることによって，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性をラムダ計算の強正規化性に帰着する，というものである．しかし，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の証明正規化は一般に合流性を満たさないため，この非決定性を反映したラムダ計算である並列単純型付ラムダ計算 $\mathrm{p}\lambda^{\rightarrow}$ を考える．

4.1 並列単純型付きラムダ計算 p$\lambda^{\to}$

定義 4.1 (p$\lambda^{\to}$) p$\lambda^{\to}$ の型は以下で定義される

$$A ::= a \mid A \to A$$

ここで，a は原子型である．p$\lambda^{\to}$ の項は以下で定義される．

$$M ::= x \mid (MM) \mid \lambda x.M \mid (M_1 \mid\mid \cdots \mid\mid M_n)$$

ここで，$n \geq 2$ とする．$(M_1 \mid\mid \cdots \mid\mid M_n)$ という形の項を並列項と呼ぶ．p$\lambda^{\to}$ の型付け規則は以下のとおりである．

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$$

$$\frac{\Gamma x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \to B} \qquad \frac{\Gamma \vdash M_1 : A \quad \cdots \quad \Gamma \vdash M_n : A}{\Gamma \vdash (M_1 \mid\mid \cdots \mid\mid M_n) : A}$$

定義 4.2 p$\lambda^{\to}$ 項上の二項関係 $\sqsubseteq$ を以下で帰納的に定義する．

- $M \sqsubseteq M$
- ある i について $N \sqsubseteq M_i$ のとき，$N \sqsubseteq (M_1 \mid\mid \cdots \mid\mid M_n)$
- 全ての i について $N_i \sqsubseteq M_i$ のとき，$(N_1 \mid\mid \cdots \mid\mid N_n) \sqsubseteq (M_1 \mid\mid \cdots \mid\mid M_n)$
- $N \sqsubseteq M$ のとき，$\lambda x.N \sqsubseteq \lambda x.M$
- $N_1 \sqsubseteq M_1$ かつ $N_2 \sqsubseteq M_2$ のとき，$N_1N_2 \sqsubseteq M_1M_2$

p$\lambda^{\to}$ 項に対する代入 $M[x := N]$ は，通常の束縛を回避する方法で定義される．

定義 4.3 p$\lambda^{\to}$ の簡約規則は以下のとおりである．

$$(\lambda x.M)N \mapsto M[x := N] \qquad (M_1 \mid\mid \cdots \mid\mid M_n)N \mapsto (M_1N \mid\mid \cdots \mid\mid M_nN)$$

$M \to N$ は M のある部分項を上記の規則によって書換えた結果が N であることを意味する．$\to^+$，$\to^*$ などは IPC$_{\mathcal{C}}$ のときと同様である．

p$\lambda^{\to}$ の関係 $\sqsubseteq$ と $\to$ の間には以下の関係が成り立つ．

補題 4.4 $M \sqsubseteq M'$ かつ $M \to N$ ならば，$M' \to^+ N'$ かつ $N \sqsubseteq N'$ である N' が存在する．

証明． $M \to N$ に関する帰納法で証明できる．□

p$\lambda^{\to}$ の簡約は強正規化性を満たす.

定理 4.5 (p$\lambda^{\to}$ の強正規化性 [12, 5]) 型付け可能な p$\lambda^{\to}$ の項から始まる無限簡約列は存在しない．

4.2 CPS 変換を用いた強正規化性証明

以下で，IPC$_{\mathcal{C}}$ の論理式から，p$\lambda^{\to}$ の型への否定変換を与える．後で与える CPS 変換は，この変換を通して型付け可能性を保存する．

定義 4.6 (否定変換) o を p$\lambda^{\to}$ の原子型とし，略記として $\neg_o(A_1, \cdots, A_n) = A_1 \to \cdots \to A_n \to o$ を用いる．とくに，$\neg_o A = A \to o$ である．また，$b \in \mathbb{B}$ に対して $\xi_b A$ を，$\xi_1 A = A$，$\xi_0 A = \neg_o A$ で定義する．IPC$_{\mathcal{C}}$ の論理式から p$\lambda^{\to}$ の型への否定変換 $\overline{A}$ を次で定義する．

- $\overline{p} = \neg_o \neg_o p$

- $\overline{c(A_1,\cdots,A_n)} = \neg_o\neg_o(E_{\vec{b}^1},\cdots,E_{\vec{b}^k})$，ここで，$(\vec{b}^1,\cdots,\vec{b}^k)$ は，$t_c(\vec{b})=0$ なる $\vec{b}$ の全体であり，各 $\vec{b}^i=(b^i_1,\cdots,b^i_n)$ について $E_{\vec{b}^i}=\neg_o(\xi_{b^i_1}\overline{A_1},\cdots,\xi_{b^i_n}\overline{A_n})$ である．

この否定変換に対応する CPS 変換 $\overline{M}$ を素朴に定義すると以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\overline{M} &= \lambda k.(M:k)\\
x:H &= xH\\
M \cdot_{\mathsf{el}^c(\vec{b}^l)} [\cdots N_i \cdots (x_j)N_j \cdots] : H &= M : \lambda g_1\cdots g_k.g_l \cdots \overline{N_i} \cdots (\lambda x_j.(N_j:H))\cdots\\
\{\cdots N_i \cdots (x_j)N_j \cdots\}_{\mathsf{in}^c(\vec{b})} : H &= HL^H_{\vec{b},\vec{b}^1}\cdots L^H_{\vec{b},\vec{b}^k}
\end{aligned}
$$

ここで，$t_c(\vec{b})=0$ なる $\vec{b}$ の全体を $(\vec{b}^1,\cdots,\vec{b}^k)$ とし，各 $\vec{b}^l$ に対して $L^H_{\vec{b},\vec{b}^l}$ は簡約を起こしうる各インデックスに対して次の項を並べた並列項とする．

$$
\begin{aligned}
&\lambda h_1\cdots h_n.h_i\overline{N_i} && (b_i=1 \text{ かつ } b^l_i=0 \text{ のとき})\\
&\lambda h_1\cdots h_n.(\lambda x_j.(N_j:H))h_j && (b_j=0 \text{ かつ } b^l_j=1 \text{ のとき})
\end{aligned}
$$

この CPS 変換は型付け可能性を保存するが，狭義簡約関係を保存しない．実際，この $M:H$ の定義において，二つの場合に変換元の簡約基が消滅する可能性がある．一つは，除去規則 $M\cdot[\vec{P}]$ において，$\vec{P}$ が抽象項を含まない場合で，このとき継続 H が消滅するため，H が含む簡約基が失われてしまう．これは [8, 6] において継続消滅と呼ばれている問題である．もう一つは，導入規則 $\{\vec{P}\}$ において，β 簡約を起こしうる相手となる除去規則が一つも存在しない P_i が存在する場合で，このとき P_i の情報が消滅するため，P_i が含む簡約基が失われてしまう．

例 4.7 真理値表 $t_\neg(b)=1-b$ をもつ結合子 $\neg$ を考える．このとき，除去規則 $M\cdot_{\mathsf{el}^\neg(1)}[N]$ に対する *CPS* 変換を考えると，

$$
M\cdot[N]:H = M:\lambda g_1.g_1\overline{N}
$$

となり，継続 H が消滅する．このため，例えば，$\overline{(M\cdot[N])\cdot[P]}$ を計算すると，P に含まれる簡約基は失われてしまう．

例 4.8 真理値表として，$t_\to(1,0)=0$，それ以外は $t_\to(b_1,b_2)=1$ となるような結合子 $\to$ を考える．このとき，導入規則 $\{N_1,N_2\}_{\mathsf{in}^\to(1,1)}$ に対する *CPS* 変換を考えると，

$$
\{N_1,N_2\}:H = HL^H_{(1,1),(1,0)} = H(\lambda h_1h_2.h_2\overline{N_2})
$$

となる．N_1 を用いる β 簡約は起こり得ないため，*CPS* 変換において N_1 の情報が消滅してしまう．

そこで，van der Giessen ら [12, 5] は，除去規則に対して継続消滅が起こる場合とそれ以外に場合分けを行ない，さらに導入規則の場合にダミーの簡約基を挿入することで問題を解決している．

定義 4.9 (IPC$_\mathcal{C}$ **の CPS 変換**) IPC$_\mathcal{C}$ の証明項 M の *CPS* 変換 $\overline{M}$ を以下で定義する．

$$
\begin{aligned}
\overline{M} &= \lambda k.(M:k)\\
x:H &= xH\\
M \cdot_{\mathsf{el}^c(\vec{b}^l)} [\cdots N_i \cdots (x_j)N_j \cdots] : H &= M : \lambda g_1\cdots g_k.g_l \cdots \overline{N_i} \cdots (\lambda x_j.(N_j:H))\cdots\\
M \cdot_{\mathsf{el}^c(\vec{b}^l)} [\cdots N_i \cdots] : H &= M : (\lambda h g_1\cdots g_k.g_l \cdots \overline{N_i} \cdots)H\\
&\qquad ([\cdots N_i \cdots] \text{ が抽象項を含まないとき})\\
\{\cdots N_i \cdots (x_j)N_j \cdots\}_{\mathsf{in}^c(\vec{b})} : H &= ((\lambda q_1\cdots q_n.H)\cdots \overline{N_i} \cdots \lambda x_j(N_j:H)\cdots)L^H_{\vec{b},\vec{b}^1}\cdots L^H_{\vec{b},\vec{b}^k}
\end{aligned}
$$

ここで，$L^H_{\vec{b},\vec{b}^i}$ は上で定義したとおりである．

これにより，簡約について以下の形で狭義簡約関係が保存されることが示される．

$M \to_\beta N$ かつ $\overline{M} \sqsubseteq M'$ ならば，$\overline{N} \sqsubseteq N'$ かつ $M' \to^+ N'$ となる N' が存在する．

これにより，β 簡約単体の強正規化性は，$\mathrm{p}\lambda^{\to}$ の強正規化性に帰着できるが，π 簡約についてはさらなる分析が必要である．まず，追加した場合分けにより π 簡約を二つの場合に分ける必要がある．π 簡約基 $M \cdot [\vec{P}] \cdot [\vec{Q}]$ において，$\vec{P}$ が抽象項を含むとき，この π 簡約を positive であると呼び，それ以外のとき negative と呼ぶ．このとき，(1) $M \to_\pi N$ が positive ならば $\overline{M} = \overline{N}$，(2) negative な π 簡約はその他の簡約に対して先送りできる，(3) π 簡約単体は強正規化性を満たす，を示すことによって，$\beta\pi$ 簡約の強正規化性が証明される．

以上が，van der Giessen ら [12, 5] による $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性証明の概要である．

5 $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性の証明

前章で見たとおり，[12, 5] における $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性の証明では，除去規則の形に応じて場合分けを行なってダミーの簡約基を挿入することで継続消滅の問題を解決していたが，この手法は素朴には $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の場合には適用できない．ラムダ・ミュー計算の CPS 変換に倣って $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の CPS 変換を定義するならば，

$$\mu\alpha.\beta M : H = (\beta M : \lambda x.x)[k_\alpha := H] = (M : k_\beta)[k_\alpha := H]$$

となる．ここで k_α は各 μ 変数 α に対して用意された $\mathrm{p}\lambda^{\to}$ の変数である．もし，M が α を含まないならば，継続消滅が発生し，H の情報が失われる．しかし，素朴に M が α を含むか否かによる場合分けを行なうと，α を含む M であっても，簡約によって α が消滅する可能性があるため，この場合分けでは（狭義）簡約関係を満たす変換を定義することが難しい．

5.1 CGPS 変換の定義

そこで Ikeda ら [6] による *CPS* 変換の拡張である *CGPS* 変換を用いる．*CGPS* 変換においては，変換中に現れる全ての継続を一様に「ゴミ部」に累積しておくことにより，変換元の全ての簡約基を保存する．さらに，π 簡約が「ゴミ捨て」ステップとして保存されるため，π 簡約を別に扱う必要がない．

CGPS 変換の準備のために $\mathrm{p}\lambda^{\to}$ における略記として以下を用意する．$\langle\!\langle M; N\rangle\!\rangle = (\lambda x.M)N$，ただし，$x$ は M，N に出現しない変数とする．さらに，$\langle\!\langle M_1; M_2; \cdots; M_n\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \cdots \langle\!\langle M_1; M_2\rangle\!\rangle \cdots; M_n\rangle\!\rangle$ とする．また，証明項を拡張して，αM の形の表現も項として扱うことにする．

定義 5.1 ($\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の CGPS 変換) $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の *CGPS* 変換を以下で定義する．

$$\overline{\overline{M}} = \lambda gk.(M : g, k)$$

$$x : G, H := xGH$$

$$M \cdot_{\mathsf{el}^c(\vec{b}^l)} [\vec{P}] : G, H = M : \langle\!\langle G; \mathcal{K}_l^{G,H}(\vec{P})\rangle\!\rangle, \mathcal{K}_l^{G,H}(\vec{P})$$

$$\{\cdots N_i \cdots (x_j)N_j \cdots\}_{\mathsf{in}^c(\vec{b})} : G, H = \langle\!\langle H L^{G,H}_{\vec{b},\vec{b}^1} \cdots L^{G,H}_{\vec{b},\vec{b}^k}; \cdots; \overline{\overline{N_i}}; \cdots; \lambda x_j.(N_j : G, H); \cdots; G\rangle\!\rangle$$

$$\mu\alpha.M : G, H = (M : g_\alpha, \lambda x.x)[g_\alpha := G, k_\alpha := H]$$

$$\alpha M : G, H = \langle\!\langle (M : g_\alpha, k_\alpha); G\rangle\!\rangle$$

ここで，$t_c(\vec{b}) = 0$ となる $\vec{b}$ の全体を $(\vec{b}^1, \cdots, \vec{b}^k)$ とし，

$$\mathcal{K}_l^{G,H}(\cdots N_i \cdots (x_j)N_j \cdots) = \lambda g_1 \cdots g_k.g_l \cdots \overline{\overline{N_i}} \cdots (\lambda x_j.(N_j : G, H)) \cdots$$

とする．さらに各 l について，$L^{G,H}_{\vec{b},\vec{b}^l}$ は，以下を並べた並列項とする．

$$\lambda h_1 \cdots h_n.h_i\overline{\overline{N_i}} \qquad (b_i = 1 \text{ かつ } b^l_i = 0 \text{ のとき})$$

$$\lambda h_1 \cdots h_n.(\lambda x_j.(N_j : G, H))h_j \qquad (b_j = 0 \text{ かつ } b^l_j = 1 \text{ のとき})$$

5.2 型付け可能性の保存

上で定義した CGPS 変換は，次の否定変換を通して型付け可能性を保存する．

定義 5.2 (否定変換) $\neg_o$ などの略記は $\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ の否定変換のときと同様である．さらに，$\top = o \to o$ とする．$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の論理式から $\mathrm{p}\lambda^{\to}$ の型への否定変換を以下で定義する．

- $\overline{\overline{A}} = \top \to \neg_o A^{\bullet}$
- $p^{\bullet} = \neg_o p$
- $c(A_1, \cdots, A_n)^{\bullet} = \neg_o(E_{\vec{b}^1}, \cdots, E_{\vec{b}^k})$，ここで，$(\vec{b}^1, \cdots, \vec{b}^k)$ は，$t_c(\vec{b}) = 0$ なる $\vec{b}$ の全体であり，各 $\vec{b}^i = (b^i_1, \cdots, b^i_n)$ について $E_{\vec{b}^i} = \neg_o(\xi_{b^i_1}\overline{\overline{A_1}}, \cdots, \xi_{b^i_n}\overline{\overline{A_n}})$ である．

定義 5.3 $\Gamma = \{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n\}$ に対して，$\overline{\overline{\Gamma}} = \{x_1 : \overline{\overline{A_1}}, \ldots, x_n : \overline{\overline{A_n}}\}$ とする．$\Delta = \{\alpha_1 : A_1, \ldots, \alpha_n : A_n\}$ に対して，$\Delta^{\bullet} = \{k_{\alpha_1} : A^{\bullet}_1, \ldots, k_{\alpha_n} : A^{\bullet}_n\}$，$\Delta^{\top} = \{g_{\alpha_1} : \top, \ldots, g_{\alpha_n} : \top\}$ とする．

命題 5.4 (型付け可能性の保存) $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ において $\Gamma \vdash M : A; \Delta$ が証明可能ならば，$\mathrm{p}\lambda^{\to}$ において $\overline{\overline{\Gamma}}, \Delta^{\bullet}, \Delta^{\top} \vdash \overline{\overline{M}} : \overline{\overline{A}}$ が証明可能である．

証明． $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の証明項 M と $\mathrm{p}\lambda^{\to}$ の項 G, H に対する命題

$\Gamma \vdash M : A; \Delta$ かつ $\overline{\overline{\Gamma}}, \Delta^{\bullet}, \Delta^{\top} \vdash G : \top$ かつ $\overline{\overline{\Gamma}}, \Delta^{\bullet}, \Delta^{\top} \vdash H : A^{\bullet}$ ならば，$\overline{\overline{\Gamma}}, \Delta^{\bullet}, \Delta^{\top} \vdash (M : G, H) : o$

とともに，導出に関する帰納法で証明できる．□

5.3 狭義簡約関係の保存

CGPS 変換によって，以下の形で狭義 $\beta\pi\mu$ 簡約関係が保存されることが示される．

(*) $M \to_{\beta\pi\mu} M'$ かつ $\overline{\overline{M}} \sqsubseteq N$ ならば，$\overline{\overline{M'}} \sqsubseteq N'$ かつ $N \to^{+} N'$ となる N' が存在する．

これより図 1 の通り，$\beta\pi\mu$ 簡約の強正規化性は，$\mathrm{p}\lambda^{\to}$ の強正規化性に帰着でき，強正規化性が証明される．CGPS 変換によって，β のみでなく，$\pi\mu$ 簡約についても狭義簡約関係が保存されるため，

$$\begin{array}{ccccccccccc}
M_1 & \to_\beta & M_2 & \to_\pi & M_3 & \to_\beta & M_4 & \to_\mu & M_5 & \to & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\overline{\overline{M_1}} & & \overline{\overline{M_2}} & & \overline{\overline{M_3}} & & \overline{\overline{M_4}} & & \overline{\overline{M_5}} & & \\
\sqsubseteq & & \sqsubseteq & & \sqsubseteq & & \sqsubseteq & & \sqsubseteq & & \\
N_1 & \to^{+} & N_2 & \to^{+} & N_3 & \to^{+} & N_4 & \to^{+} & N_5 & \to & \cdots
\end{array}$$

図 1. CGPS 変換の狭義簡約関係

π 簡約について別途扱う必要がなくなるという意味で，van der Giessen ら [12, 5] によるものより簡素な証明になる．

以下，(*) を証明する．まず，以下の補題が成立する．

補題 5.5 *1.* $G \to G'$ ならば，$M : G, H \to^{+} M : G', H$ である．

2. $H \to H'$ ならば，$M : G, H \to^{*} M : G, H'$ である．

証明. いずれも M に関する帰納法で証明できる．$M:G,H$ の定義より，変換結果は必ず部分項として G を含むことに注意．□

補題 5.6 $G \sqsubseteq G'$ かつ $H \sqsubseteq H'$ ならば，$M:G,H \sqsubseteq M:G',H'$ である．

証明. M に関する帰納法で証明できる．□

5.3.1 β 簡約の保存

補題 5.7 *1.* $(M:G,H)[z:=\overline{\overline{N}}] \to_\beta (M[z:=N]):G[z:=\overline{\overline{N}}],H[z:=\overline{\overline{N}}]$.
2. $\overline{\overline{M}}[z:=\overline{\overline{N}}] \to_\beta \overline{\overline{M[z:=N]}}$.

証明. 1, 2 同時に M に関する帰納法で証明できる．□

命題 5.8 $M \to_\beta N$ のとき，
1. $(M:G,H) \to^+ K$ かつ $(N:G,H) \sqsubseteq K$ となる K が存在する．
2. $\overline{\overline{M}} \to^+ K$ かつ $\overline{\overline{N}} \sqsubseteq K$ となる K が存在する．

証明. $M \to_\beta N$ の導出に関する帰納法で証明する．
1.（$\{\cdots N_i \cdots\}\cdot[\cdots(x_i)M_i\cdots] \to_\beta M_i[x_i:=N_i]$ のとき.）
$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{G,H}(\cdots(x_i)M_i\cdots) = \lambda g_1\cdots g_k.g_l\cdots(\lambda x_i.(M_i:G,H))\cdots$ とする．

$$\begin{aligned}
\{\cdots N_i \cdots\}\cdot[\cdots(x_i)M_i\cdots]:G,H &= \langle\!\langle \mathcal{K} L^{\langle\!\langle G;\mathcal{K}\rangle\!\rangle,\mathcal{K}}_{\vec{b},\vec{b}^1}\cdots L^{\langle\!\langle G;\mathcal{K}\rangle\!\rangle,\mathcal{K}}_{\vec{b},\vec{b}^k};\cdots;\langle\!\langle G;\mathcal{K}\rangle\!\rangle\rangle\!\rangle \\
&\to^+ \mathcal{K} L^{\langle\!\langle G;\mathcal{K}\rangle\!\rangle,\mathcal{K}}_{\vec{b},\vec{b}^1}\cdots L^{\langle\!\langle G;\mathcal{K}\rangle\!\rangle,\mathcal{K}}_{\vec{b},\vec{b}^k} \\
&\to^+ L^{\langle\!\langle G;\mathcal{K}\rangle\!\rangle,\mathcal{K}}_{\vec{b},\vec{b}^l}\cdots(\lambda x_i.(M_i:G,H))\cdots \\
&= (\cdots \mid\mid \lambda h_1\cdots h_n.h_i\overline{\overline{N_i}} \mid\mid \cdots)\cdots(\lambda x_i.(M_i:G,H))\cdots \\
&\to^+ (\cdots \mid\mid (M_i:G,H)[x_i:=\overline{\overline{N_i}}] \mid\mid \cdots) \\
&\to^* (\cdots \mid\mid M_i[x_i:=N]:G,H \mid\mid \cdots) \qquad \text{（補題 5.7）} \\
&\sqsupseteq M_i[x_i:=N]:G,H
\end{aligned}$$

（$\{\cdots(y_i)N_i\cdots\}\cdot[\cdots M_i\cdots] \to_\beta N_i[y_i:=M_i]\cdot[\cdots M_i\cdots]$ のとき.）
$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{G,H}(\cdots M_i\cdots) = \lambda g_1\cdots g_k.g_l\cdots\overline{\overline{M_i}}\cdots$ とする．

$$\begin{aligned}
\{\cdots(y_i)N_i\cdots\}\cdot[\cdots M_i\cdots]:G,H &\to^+ L^{\langle\!\langle G;\mathcal{K}\rangle\!\rangle,\mathcal{K}}_{\vec{b},\vec{b}^l}\cdots\overline{\overline{M_i}}\cdots \qquad \text{（上と同様）} \\
&= (\cdots \mid\mid \lambda h_1\cdots h_n.(\lambda y_i.N_i:\langle\!\langle G;\mathcal{K}\rangle\!\rangle,\mathcal{K})h_i \mid\mid \cdots)\cdots\overline{\overline{M_i}}\cdots \\
&\to^+ (\cdots \mid\mid (N_i:\langle\!\langle G,\mathcal{K}\rangle\!\rangle,\mathcal{K})[y_i:=\overline{\overline{M_i}}] \mid\mid \cdots) \\
&\to^* (\cdots \mid\mid N_i[y_i:=M_i]:\langle\!\langle G,\mathcal{K}\rangle\!\rangle,\mathcal{K} \mid\mid \cdots) \qquad \text{（補題 5.7）} \\
&\sqsupseteq N_i[y_i:=M_i]:\langle\!\langle G,\mathcal{K}\rangle\!\rangle,\mathcal{K} \\
&= N_i[y_i:=M_i]\cdot[\cdots M_i\cdots]:G,H
\end{aligned}$$

（$N \to_\beta N'$ で，$M\cdot\{\cdots N\cdots\} \to_\beta M\cdot\{\cdots N'\cdots\}$ のとき.）
$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{G,H}(\cdots N\cdots) = \lambda g_1\cdots g_k.g_l\cdots\overline{\overline{N}}\cdots$，$\mathcal{K}' = \mathcal{K}^{G,H}(\cdots N'\cdots) = \lambda g_1\cdots g_k.g_l\cdots\overline{\overline{N'}}\cdots$ とする．帰納法の仮定より，$\overline{\overline{N}} \to^+ N'' \sqsupseteq \overline{\overline{N'}}$ なる N'' が存在する．

$$\begin{aligned}
M\cdot\{\cdots N\cdots\}:G,H &= M:\langle\!\langle G;\mathcal{K}\rangle\!\rangle,\mathcal{K} \\
&\to^+ M:\langle\!\langle G;\lambda g_1\cdots g_k.g_l\cdots N''\cdots\rangle\!\rangle,\lambda g_1\cdots g_k.g_l\cdots N''\cdots \qquad \text{（補題 5.5）} \\
&\sqsupseteq M:\langle\!\langle G;\mathcal{K}'\rangle\!\rangle,\mathcal{K}' \qquad \text{（補題 5.6）} \\
&= M\cdot\{\cdots N'\cdots\}:G,H
\end{aligned}$$

他の場合も同様に証明できる．□

5.3.2 π 簡約の保存

命題 5.9 $M \to_\pi N$ のとき，

1. $\underline{M} : G, \underline{H} \to^+ N : G, H$

2. $\overline{\overline{M}} \to^+ \overline{\overline{N}}$

証明. $M \to_\pi N$ の導出に関する帰納法で証明する．

（$M \cdot [\cdots (x_i)N_i \cdots] \cdot [\vec{Q}] \to_\pi M \cdot [\cdots (x_i)N_i \cdot [\vec{Q}] \cdots]$ のとき.）

$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{G,H}(\vec{Q})$，$\mathcal{K}' = \mathcal{K}^{\langle\!\langle G;\mathcal{K}\rangle\!\rangle,\mathcal{K}}(\cdots (x_i)N_i \cdots)$ とすると，$\mathcal{K}' = \lambda g_1 \cdots g_k.g_l \cdots (\lambda x_i.(N_i : \langle\!\langle G;\mathcal{K}\rangle\!\rangle, \mathcal{K})) \cdots = \lambda g_1 \cdots g_k.g_l \cdots (\lambda x_i.(N_i \cdot [\vec{Q}]) : G, H) \cdots = \mathcal{K}^{G,H}(\cdots (x_i)N_i \cdot [\vec{Q}] \cdots)$ である．このとき，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
M \cdot [\cdots (x_i)N_i \cdots] \cdot [\vec{Q}] : G, H &= M \cdot [\cdots (x_i)N_i \cdots] : \langle\!\langle G;\mathcal{K}\rangle\!\rangle, \mathcal{K} \\
&= M : \langle\!\langle G;\mathcal{K};\mathcal{K}'\rangle\!\rangle, \mathcal{K}' \\
&\to M : \langle\!\langle G;\mathcal{K}'\rangle\!\rangle, \mathcal{K}' \\
&= M \cdot [\cdots (x_i)N_i \cdot [\vec{Q}] \cdots] : G, H
\end{aligned}$$

他の場合は，命題 5.8 と同様である．□

5.3.3 μ 簡約の保存

定義 5.10 代入 $\theta_{\alpha,l,\vec{P}}$ を次で定義する．

$$\theta_{\alpha,l,\vec{P}} = [g_\alpha := \langle\!\langle g_\alpha; k_\alpha\rangle\!\rangle][k_\alpha := \mathcal{K}_l^{g_\alpha,k_\alpha}(\vec{P})]$$

このとき，$(\mu\alpha.M) \cdot_{\mathsf{el}(\vec{b}^{\,l})} [\vec{P}] : G, H = (M : g_\alpha, \lambda x.x)\theta_{\alpha,l,\vec{P}}[g_\alpha := G, k_\alpha := H]$ と表せる．

補題 5.11 $(M : G, H)\theta_{\alpha,l,\vec{P}} = M[\alpha X := \alpha X \cdot [\vec{P}]] : G\theta_{\alpha,l,\vec{P}}, H\theta_{\alpha,l,\vec{P}}$

証明. M に関する帰納法で証明する．$\theta = \theta_{\alpha,l,\vec{P}}$，$\mathcal{K} = \mathcal{K}_l^{g_\alpha,k_\alpha}(\vec{P})$ とする．

（αM のとき.）

$$\begin{aligned}
(\alpha M : G, H)\theta &= \langle\!\langle (M : g_\alpha, k_\alpha)\theta; G\theta\rangle\!\rangle \\
&= \langle\!\langle (M[\alpha X := \alpha X \cdot [\vec{P}]] : \langle\!\langle g_\alpha;\mathcal{K}\rangle\!\rangle, \mathcal{K}); G\theta\rangle\!\rangle && \text{（帰納法の仮定）} \\
&= \langle\!\langle (M[\alpha X := \alpha X \cdot [\vec{P}]] \cdot [\vec{P}] : g_\alpha, k_\alpha); G\theta\rangle\!\rangle \\
&= \alpha(M[\alpha X := \alpha X \cdot [\vec{P}]] \cdot [\vec{P}]) : G\theta, H\theta
\end{aligned}$$

他の場合は容易に証明できる．□

命題 5.12 $M \to_\mu N$ のとき，

1. $\underline{M} : G, \underline{H} \to^+ N : G, H$

2. $\overline{\overline{M}} \to^+ \overline{\overline{N}}$

証明. $M \to_\mu N$ の導出に関する帰納法で証明する．

（$(\mu\alpha.M) \cdot [\vec{P}] \to_\mu \mu\alpha.M[\alpha X := \alpha X \cdot [\vec{P}]]$ のとき.）

$$\begin{aligned}
(\mu\alpha.M) \cdot [\vec{P}] : G, H &= (M : g_\alpha, \lambda x.x)\theta_{\alpha,l,\vec{P}}[g_\alpha := G, k_\alpha := H] \\
&= (M[\alpha X := \alpha X \cdot [\vec{P}]] : \langle\!\langle g_\alpha; \mathcal{K}_l^{g_\alpha,k_\alpha}(\vec{P})\rangle\!\rangle, \lambda x.x)[g_\alpha := G, k_\alpha := H] && \text{（補題 5.11）} \\
&\to (M[\alpha X := \alpha X \cdot [\vec{P}]] : g_\alpha, \lambda x.x)[g_\alpha := G, k_\alpha := H] \\
&= \mu\alpha.M[\alpha X := \alpha X \cdot [\vec{P}]] : G, H
\end{aligned}$$

他の場合は命題 5.8 と同様である．□

5.3.4　強正規化性の証明

命題 5.13 $M \to_{\beta\pi\mu} M'$ かつ $\overline{\overline{M}} \sqsubseteq N$ ならば，$\overline{\overline{M'}} \sqsubseteq N'$ かつ $N \to^+ N'$ となる N' が存在する．

証明．　補題 4.4，および命題 5.8，5.9，5.12 による．□

定理 5.14 ($\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ **の強正規化性)** $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ において $\beta\pi\mu$ の無限簡約列は存在しない．

証明．　$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ において，証明項 M_1 から始まる無限簡約列 $M_1 \to M_2 \to M_3 \to \cdots$ が存在すると仮定する．命題 5.4 より，$\overline{\overline{M_1}}$ は $\mathrm{p}\lambda^{\to}$ で型をもつ．さらに，$\overline{\overline{M_1}} \sqsubseteq \overline{\overline{M_1}}$ が成立する．命題 5.13 より，$N_2, N_3, \ldots$ が存在して，$\overline{\overline{M_1}} \to^+ N_2 \to^+ N_3 \to^+ \cdots$ は $\mathrm{p}\lambda^{\to}$ の無限簡約列となるので，$\mathrm{p}\lambda^{\to}$ の強正規化性に矛盾する．□

6　まとめ

本論文では，古典論理に対する新しい汎用的自然演繹として $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ とその証明正規化を提案し，主部簡約性，部分論理式性，強正規化性が成立することを証明した．これにより，$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の無矛盾性や保守性が証明される．また，Geuvers ら [3] による古典論理に対する汎用的自然演繹である $\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ と証明可能性の意味で同等であることを示し，$\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ に対する無矛盾性，保守性を証明した．$\mathrm{CPC}_{\mathcal{C}}$ は標準的ではない形の導入規則を持つ自然演繹であるため，この体系に対して直接証明正規化の概念を導入することは難しいと考えられる．そこで，$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ では Parigot のラムダ・ミュー計算のアイディアをもとにして証明正規化を定義した．

$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性は，Ikeda ら [6] による CGPS 変換のアイディアを利用した．$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ から型付ラムダ計算の拡張体系 $\mathrm{p}\lambda^{\to}$ への変換で，型付け可能性と狭義簡約関係を保存するものを与えることにより，$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性を，$\mathrm{p}\lambda^{\to}$ の強正規化性に帰着した．

今後の課題としては，$\mathrm{IPC}_{\mathcal{C}}$ や $\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ の強正規化性を（ラムダ計算の強正規化性に依存せず）直接証明することや，一定の条件を満たす $\mathcal{C}$ に対するこれらの体系の合流性を証明することが考えられる．強正規化性については，可約性述語（reducibility predicate）を用いることによって直接証明することが考えられる．例えば，Parigot はラムダ・ミュー計算に対して可約性 (reducibility) 述語を用いて強正規化性を証明しており [10]，$\mathrm{IPC}^{\mu}_{\mathcal{C}}$ に対してもこのアイディアを適用することが考えられる．合流性については，一般に π のような置換簡約を含む自然演繹の合流性証明に有用であると考えられる，合成的 Z 定理 [7] を用いて証明することが考えられる．

参考文献

[1] P. de Groote. On the strong normalisation of intuitionistic natural deduction with permutation-conversions. *Information and Computation*, 178:441–464, 2002.

[2] J. Espírito Santo, R. Matthes, and L. Pinto. Continuation-passing style and strong normalisation for intuitionistic sequent calculi. *Logical Method in Computer Science*, 5(2), 2009.

[3] H. Geuvers and T. Hurkens. Deriving natural deduction rules from truth tables. In *Logic and Its Applications—7th Indian Conference (ICLA 2017)*, volume 10119 of *LNCS*, pages 123–138, 2017.

[4] H. Geuvers and T. Hurkens. Proof terms for generalized natural deduction. In *23rd International Conference on Types for Proofs and Programs (TYPES 2017)*, volume 104 of *LIPIcs*, pages 3:1–3:39, 2018.

[5] H. Geuvers, Iris van der Giessen, and T. Hurkens. Strong normalization for truth table natural deduction. *Fundamenta Informaticae*, 170(1-3):139–176, 2019.

[6] S. Ikeda and K. Nakazawa. Strong normalization proofs by cps-translations. *Information Processing Letters*, 99:163–170, 2006.

[7] K. Nakazawa and K.Fujita. Compositional z: Confluence proofs for permutative conversion. *Stduia Logica*, 104:1205–1224, 2016.

[8] K. Nakazawa and M. Tatsuta. Strong normalization proof with cps-translation for second order classical natural deduction. *The Journal of Symbolic Logic*, 68(3):851–859, 2003. Corrigendum is available in: The Journal of Symbolic Logic 68 (4) (2003) 1415–1416.

[9] M. Parigot. $\lambda\mu$-calculus: An algorithmic interpretation of classical natural deduction. In *Logic Programming and Automated Reasoning,International Conference LPAR'92*, volume 624 of *LNCS*, pages 190–201, 1992.

[10] M. Parigot. Proofs of strong normalisation for second order classical natural deduction. *The Journal of Symbolic Logic*, 62(4):1461–1479, 1997.

[11] D. Prawitz. *Natural deduction: a proof-theoretical study*. Almqvist & Wiksell, 1965.

[12] Iris van der Giessen. Natural deduction derived from truth tables. Master's thesis, Radboud Universiteit Nijmegen, 2018.