選言を含む自然演繹古典論理の強正規化性

中澤 巧爾*　　龍田 真†

概 要

本論文は，選言とその置換簡約を含む自然演繹古典論理体系の強正規化性を，CPS 変換と増加項の概念を用いて証明し，de Groote による誤った証明に対する修復を与える．さらに，含意，連言に対する除去規則の一般化である一般的除去規則とその置換簡約を含む自然演繹古典論理についても，その強正規化性を同様の方法で証明する．この際，置換簡約と μ-簡約については，項が型をもたなくても強正規化性が成立することを証明する．また，選言を含む自然演繹古典論理が，一般的除去規則をもつ自然演繹古典論理に証明正規化も含めて埋め込めることを示し，これによって選言を含む自然演繹古典論理の強正規化性が一般的除去規則をもつ自然演繹古典論理の強正規化可能性に帰着できることを示す．

1　はじめに

近年，Griffin が [7] において古典論理とプログラムにおけるコントロールオペレータの関連を指摘し，Parigot が [12] において λ 計算の拡張として自然演繹古典論理に相当する $\lambda\mu$ 計算を提案して以来，古典論理の計算体系としての側面に対する興味が非常に高まっており，[3]，[13]，[6]，[4]，[17]，[2]，[9]，[14] など古典論理の証明の正規化に関する研究が盛んになされている．

自然演繹直観主義論理における正規な証明は，λ 計算における β 変換に相当する簡約を繰り返すことによって得られる．このとき正規な証明は，証明中の任意の除去規則の主前提は他の除去規則と仮定のみから得られる，という特徴を持つ．ここで，除去規則の主前提とはその除去規則によって除去される結合子を含む前提のことで，例えば → 除去の規則

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta}\ (\to\mathrm{E})$$

における前提 $\alpha \to \beta$ が主前提である．この特徴のため，正規な証明中に出現する全ての論理式は結論または仮定の部分論理式になっている，という顕著な性質 (subformula property) が成立する．これは自然演繹古典論理，すなわち型付 $\lambda\mu$ 計算でも，簡約として構造簡約 (μ 簡約) を考えることによって同様に成立する．しかし，論理結合子として選言を含む体系を考える場合，β 正規な証明が subformula property を満たすとは限らない．選言の除去規則は,

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \quad \Gamma, \alpha \vdash \gamma \quad \Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}\ (\vee\mathrm{E})$$

のように，結論 γ が主前提 $\alpha \vee \beta$ の部分論理式とは限らない形をしているため，β 簡約を考えるのみでは subformula property が成立しないのである．このような形の除去規則をもつ体系の subformula property を保証するために，古くから**置換簡約**と呼ばれる簡約が考えられている．置換簡約とは，連続する二つの除去規則を置換する簡約である (図 1)．この規則により，正規な証明中の任意の除去規則の主前提は「選言以外の結合子に関する除去規則の結論，または，仮定」のみから得られることが解り，これによって subformula property が保証される．このような，結論が主前提の部分論理式となっていないような形の除去規則は選言の他にも存在 (∃) や，様相論理における様相オペレータなどの除去規則にも見られる

*京都大学大学院情報学研究科 `knak@kuis.kyoto-u.ac.jp`
†国立情報学研究所 `tatsuta@nii.ac.jp`

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, M\\ \Gamma\vdash\alpha\vee\beta\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\, P_1\\ \Gamma,\alpha\vdash\gamma_1\to\gamma_2\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\, P_2\\ \Gamma,\beta\vdash\gamma_1\to\gamma_2\end{array}}{\Gamma\vdash\gamma_1\to\gamma_2}\,(\vee\mathrm{E})\qquad\begin{array}{c}\vdots\, N\\ \Gamma\vdash\gamma_1\end{array}}{\Gamma\vdash\gamma_2}\,(\to\mathrm{E})$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, M\\ \Gamma\vdash\alpha\vee\beta\end{array}\quad\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, P_1\\ \Gamma,\alpha\vdash\gamma_1\to\gamma_2\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\, N\\ \Gamma\vdash\gamma_1\end{array}}{\Gamma,\alpha\vdash\gamma_2}\,(\to\mathrm{E})\quad\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, P_2\\ \Gamma,\beta\vdash\gamma_1\to\gamma_2\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\, N\\ \Gamma\vdash\gamma_1\end{array}}{\Gamma,\beta\vdash\gamma_2}\,(\to\mathrm{E})}{\Gamma\vdash\gamma_2}\,(\vee\mathrm{E})$$

図 1: 置換簡約

が，これらの結合子に関しても同様の置換簡約が考えられる．

[4] において de Groote は，自然演繹古典論理に対応する Parigot の $\lambda\mu$ 計算 [12] に選言，連言を加え，選言に関する置換簡約を導入した体系 $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ を提案し，その強正規化性の CPS 変換を用いた証明を試みているが，Matthes が [9] で指摘したとおり，この証明には誤りが含まれている．

本論文では，我々が [10] で $\lambda\mu$ 計算の強正規化性の証明に用いた**増加項**の概念による証明法が，$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の強正規化性の証明にも利用できることを示し，[4] の証明の誤りを修正する．

連言や含意に関しても選言と同様の形の除去規則を考えることができる．これを，von Plato は [15] で**一般的除去規則**と呼び，連言，選言，含意の一般的除去規則を持つような自然演繹直観主義論理体系を定義している．一般的除去規則に対しては選言のときと同様の置換簡約を考えることができるが，[15] では一般的除去規則をもつ自然演繹における正規な証明とシーケント計算におけるカットなしの証明の間に一対一の対応関係があることを示している．この正規性は β 簡約と置換簡約に関する正規性であり，ここでも置換簡約の概念は重要な役割を果たしている．この結果は古典論理にも自然に拡張できる．

一般的除去規則に対する強正規化性は，含意のみを含む直観主義論理の場合に限り，Joachimski と Matthes によって証明されている [8] が，より一般の論理結合子を含む体系や古典論理の場合に関しては未だ証明がない．

本論文では選言，連言，含意とその一般的除去規則をもつ自然演繹古典論理 $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ の強正規化性を $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の場合と同様，CPS 変換と増加項を用いる方法によって証明する．この際，μ 簡約と置換簡約に関しては型を持たない項に関しても強正規化可能であることを，de Groote[4] のノルムの概念を拡張することによって証明する．

2　自然演繹古典論理 $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$

この章では，de Groote が [4] で提案した選言とその置換簡約を含む自然演繹古典論理体系 $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ を定義し，その強正規化性の証明のアイディアについて述べる．

$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ は Parigot の $\lambda\mu$ 計算 [13] に連言，選言，及び証明の正規化として選言に対する**置換簡約**を追加した体系である．

定義 2.1 ($\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$) $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の型，項，型付け規則，簡約規則などは以下で定義される．

(i) 型は以下で定義される論理式と同一であるとする．

$$\alpha,\beta\ ::=\ \bot \mid \alpha\to\beta \mid \alpha\wedge\beta \mid \alpha\vee\beta$$

(ii) 項を以下で定義する．

$$\begin{aligned} M, N \ ::= \ & x \mid \lambda x.M \mid MN \mid \langle M, N\rangle \mid \pi_j M \\ & \mid \iota_j M \mid \delta(M, x_1.N_1, x_2.N_2) \\ & \mid aM \mid \mu a.M \end{aligned}$$

ここで，$j=1$ または 2 である．以下同様にメタ変数 j はインデックス 1 または 2 を表すとする．x を λ 変数，a を μ 変数と呼ぶ．また，**除去文脈**を以下で定義する．

$$\mathcal{K} \ ::= \ [] \mid \mathcal{K}M \mid \pi_j\mathcal{K} \mid \delta(\mathcal{K}, x.N, y.L)$$

除去文脈の [] への項 M の代入を代入して得られる項 $\mathcal{K}[M]$ は通常のとおり定義する．除去文脈のうち以下で定義されるものを特に**単一除去文脈**と呼ぶ．

$$\mathcal{C} \ ::= \ []M \mid \pi_j[] \mid \delta([], x.N, y.L)$$

(iii) $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の型判断は，$\Gamma \vdash M : \alpha; \Delta$ の形である．ここで Γ は $x:\alpha$ の形の λ 変数に対する型宣言の集合，Δ は $a:\alpha$ の形の μ 変数に対する型宣言の集合である．型付け規則は図 2 のとおりである．

(iv) 代入 $M[x:=N]$ は通常と同様に定義される．除去文脈 $\mathcal{K}$ に対して，**構造的代入** $M[a \Leftarrow \mathcal{K}]$ は，M 中の各部分項 aN を $a(\mathcal{K}[N[a\Leftarrow\mathcal{K}]])$ で置き換えたものとする．$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の簡約規則は図 3 のとおりである．ここで，$\mathcal{C}$ は任意の単一除去文脈である．簡約は項中の任意の場所で行なえるとする．δ で定義される簡約を**置換簡約**と呼ぶ．以下では $\to$ によって 1 ステップの β，δ または μ のいずれかの簡約を表わし，$\to^+$ によって $\to$ の推移的閉包を，$\to^*$ によって $\to$ の反射的推移的閉包を，それぞれ表わすとする．項 M が**正規である**とは，$M \to N$ となる N が存在しないこととする．

正規な証明に求められる好ましい性質として subformula property がある．これは，正規な証明中に出現する任意の論理式が結論の部分式になっている，という性質であり，体系の無矛盾性を証明したり，自動証明を考える際に有利な性質である．$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ のような，選言を含む自然演繹体系においては，選言の除去規則 ($\vee$E) 中の γ は $\alpha\vee\beta$ の部分式とは限らない．このため，正規化として β 簡約のみを考えると subformula property は成立しない．置換簡約 δ を追加することによってこの性質が保証される [4]．

定理 2.2 (Subject Reduction [4]) $\Gamma \vdash M : \alpha; \Delta$ が $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ において導出可能であり，$M \to N$ であれば，$\Gamma \vdash N : \alpha; \Delta$ が $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ において導出可能である．

定理 2.3 (Subformula property [4]) $\Gamma \vdash M : \alpha; \Delta$ の $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ における正規な証明中に現れる任意の論理式 β は，Γ，Δ 中の論理式もしくは α の部分式である．

[4] において，de Groote はこの体系の強正規化性に対する CPS 変換を用いた証明を試みているが，Matthes が [9] で指摘しているとおり，この証明は誤りを含んでいる．

$\lambda\mu$ 計算の μ オペレータのようなコントロールオペレータを含む計算体系の強正規化性を CPS 変換によって単純型付 λ 計算の強正規化性に帰着する方法は [4] の他にも，[3]，[13]，[6]，[5] など多く試みられている．例えば $\lambda\mu$ 計算の例では，$\overline{\overline{M}} \equiv \lambda k.(M:k)$ で定義される CPS 変換は型付け可能性と簡約関係を保存する．ここで $M:K$ は，

$$\begin{aligned} x:K &\equiv xK \\ \lambda x.M:K &\equiv K(\lambda x.\overline{\overline{M}}) \\ MN:K &\equiv M:\lambda m.m\overline{\overline{N}}K \\ aM:K &\equiv M:k_a \quad (k_a \text{ は } \lambda \text{ 変数}) \\ \mu a.M:K &\equiv (M:\lambda x.x)[k_a:=K] \end{aligned}$$

のように定義される．この定義では，μ 抽象の CPS 変換における継続 K の受け渡しを代入の形で定義することにより，簡約関係を保存している．しかし，μ 抽象 $\mu a.M$ の M が a を自由に含まない場合，継続

$$\frac{}{\Gamma, x : \alpha \vdash x : \alpha; \Delta}\ (\mathrm{Ax})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \alpha; \Delta, a : \alpha}{\Gamma \vdash aM : \bot; \Delta, a : \alpha}\ (\bot\mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \bot; \Delta, a : \alpha}{\Gamma \vdash \mu a.M : \alpha; \Delta}\ (\bot\mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma, x : \alpha \vdash M : \beta; \Delta}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \alpha \to \beta; \Delta}\ (\to\mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \alpha \to \beta; \Delta \quad \Gamma \vdash N : \alpha; \Delta}{\Gamma \vdash MN : \beta; \Delta}\ (\to\mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \alpha; \Delta \quad \Gamma \vdash N : \beta; \Delta}{\Gamma \vdash \langle M, N\rangle : \alpha \wedge \beta; \Delta}\ (\wedge\mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \alpha_1 \wedge \alpha_2; \Delta}{\Gamma \vdash \pi_j M : \alpha_j; \Delta}\ (\wedge\mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \alpha_j; \Delta}{\Gamma \vdash \iota_j M : \alpha_1 \vee \alpha_2; \Delta}\ (\vee\mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \alpha \vee \beta; \Delta \quad \Gamma, x : \alpha \vdash N : \gamma; \Delta \quad \Gamma, y : \beta \vdash L : \gamma; \Delta}{\Gamma \vdash \delta(M, x.N, y.L) : \gamma; \Delta}\ (\vee\mathrm{E})$$

図 2: $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の型付け規則

$$\begin{array}{lrcl}
(\beta_\to) & (\lambda x.M)\ N & \to_\beta & M[x := N] \\
(\beta_\wedge) & \pi_j\langle M_1, M_2\rangle & \to_\beta & M_j \\
(\beta_\vee) & \delta(\iota_j M, x_1.N_1, x_2.N_2) & \to_\beta & N_j[x_j := M] \\
 & & & \\
(\delta) & \mathcal{C}[\delta(M, x.N, y.L)] & \to_\delta & \delta(M, x.\mathcal{C}[N], y.\mathcal{C}[L]) \\
 & & & \\
(\mu) & \mathcal{C}[\mu a.M] & \to_\mu & \mu a.M[a \Leftarrow \mathcal{C}]
\end{array}$$

図 3: $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の簡約規則

K は消滅してしまうため，K 中に含まれる簡約基を簡約するステップは消滅してしまう．例えば，任意の N について $\overline{\overline{(\mu a.x)N}} \equiv \lambda k.x(\lambda x.x)$ であるから，N 中の簡約基は CPS 変換後の項には現れない．この**継続消滅**によって，CPS 変換を用いた強正規化性の証明の多くは誤りを含んでいる [10].

[4] において de Groote は，上記の問題を回避するために，μ 抽象 $\mu a.M$ の CPS 変換を，M が自由な a を含まない場合に限り，$\mu a.M : K \equiv (\lambda k_a.(M : \lambda x.x))K$ とすることで修正を試みている．しかし，この修正後の CPS 変換では簡約関係を保存しない例が Matthes によって与えられている [9]．例えば，$M \equiv \mu a.(\lambda z.x)(ay)$, $N \equiv \mu a.x$ とすると $M \to_\beta N$ であるが,

$$\overline{\overline{M}} \equiv \lambda k.(\lambda m.m(\lambda k_0.yk)(\lambda x.x))(\lambda z k_1.x k_1)$$

$$\overline{\overline{N}} \equiv \lambda k.(\lambda k_a.x(\lambda x.x))k$$

となり，これらは合流するが，$\overline{\overline{M}} \to^* \overline{\overline{N}}$ は成立しない．すなわち [4] の Lemma 10 は成立せず，$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の強正規化性の証明は完成していない．

3 $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の強正規化性

この章では [10] における増加項を用いた証明法が $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の強正規化性にも適用できることを示し，de Groote による誤った証明に対する修正を与える．

まず，CPS 変換を定義し，その性質を述べる．次に増加項の概念について説明する．最後にこれらの性質を用いて $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の強正規化性を証明する．

3.1 CPS 変換

ここで定義する CPS 変換は [4] で modified CPS-translation として定義されているものと本質的に同じである．ただし，増加項の概念を用いて強正規化性を証明するため，μ 抽象に関する場合分けは不要である．

定義 3.1 (CPS 変換) $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ 項 M の **CPS 変換**を $\overline{\overline{M}} \equiv \lambda k.(M : k)$ と定義する．ここで，$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ 項 M と λ 項 K に対して $M : K$ は以下で定義される．

$$\begin{aligned}
x : K &\equiv xK \\
\lambda x.M : K &\equiv K(\lambda x.\overline{\overline{M}}) \\
MN : K &\equiv M : \lambda m.m\overline{\overline{N}}K \\
\langle M, N\rangle : K &\equiv K(\lambda x.x\overline{\overline{M}}\,\overline{\overline{N}}) \\
\pi_j M : K &\equiv M : \lambda x.x(\lambda y_1 y_2.y_j K) \\
\iota_j M : K &\equiv K(\lambda y_1 y_2.y_j \overline{\overline{M}}) \\
\delta(M, x_1.P_1, x_2.P_2) : K &\equiv \\
&\quad M : \lambda m.m(\lambda x_1.(P_1 : K))(\lambda x_2.(P_2 : K)) \\
aM : K &\equiv M : k_a \quad (k_a \text{ は } \lambda \text{ 変数}) \\
\mu a.M : K &\equiv (M : \lambda x.x)[k_a := K]
\end{aligned}$$

定義 3.2 (二重否定変換) 論理式 α の**二重否定変換**を $\overline{\alpha} \equiv \neg\neg\alpha^*$ で定義する．ここで $\neg\alpha$ は $\alpha \to \bot$ の略記であり，α^* は以下で定義される．

$$\begin{aligned}
\bot^* &\equiv \bot \\
(\alpha \to \beta)^* &\equiv \overline{\overline{\alpha}} \to \overline{\overline{\beta}} \\
(\alpha \wedge \beta)^* &\equiv \neg(\overline{\overline{\alpha}} \to \neg\overline{\overline{\beta}}) \\
(\alpha \vee \beta)^* &\equiv \neg\overline{\overline{\alpha}} \to \neg\neg\overline{\overline{\beta}}
\end{aligned}$$

命題 3.3 $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ で M が型をもてば，単純型付 λ 計算で $\overline{\overline{M}}$ が型をもつ．より詳細には，$\Gamma \vdash M : \alpha; \Delta$ が導出可能なとき，単純型付 λ 計算において $\overline{\overline{\Gamma}}, \neg\Delta^* \vdash \overline{\overline{M}} : \overline{\alpha}$ が導出可能である．

証明. $\Gamma \vdash M : \alpha; \Delta$ の導出に関する帰納法による． □

定義 3.4 μ 抽象項 $\mu a.M$ が**空疎である**とは，M 中に自由な a が現れないことを言う．$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ 項 M が**空疎である**とは，M が部分項として空疎な μ 抽象項を含むことを言う．

補題 3.5 $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ 項 M は型をもち，空疎でなく，さらに K は任意の λ 項とするとき，以下が成り立つ．

(i) M が a を自由変数として含み，a の型が $\bot$ でないならば，$M : K$ は k_a を自由変数として含む．

(ii) M の型が $\bot$ でないとき，$M : K$ は自由変数として K の自由変数を全て含む．

証明. $\Gamma \vdash M : \alpha; \Delta$ の導出に関する帰納法によって同時に証明する.

(i) $M \equiv M_1 M_2$ **で，**M_2 **が** a **を含むとき．** (i) に関する帰納法の仮定より，$\overline{\overline{M_2}} \equiv \lambda k.M_2 : k$ は k_a を含む．また，M_1 は $\beta \to \alpha \not\equiv \bot$ の形の型を持つから (ii) に関する帰納法の仮定より，$M_1 M_2 : K \equiv M_1 : \lambda m.m\overline{\overline{M_2}}K$ は，$\overline{\overline{M_2}}$ の自由変数を全て含むから k_a も含む.

$M \equiv aM_1$ **のとき．** a の型が $\bot$ でないことより，M_1 の型は $\bot$ でない．(ii) に関する帰納法の仮定より，$aM_1 : K \equiv M_1 : k_a$ は自由変数として k_a を含む.

他の場合も同様に証明できる.

(ii) $M \equiv \delta(N, x_1.P_1, x_2.P_2)$ **のとき．** M の型が $\bot$ でないことより，P_j の型も $\bot$ でない．(ii) に関する帰納法の仮定より，$P_j : K$ は K の自由変数を全て含む．さらに N は $\alpha_1 \vee \alpha_2$ の形の型を持つから，(ii) に関する帰納法の仮定より，$M : K \equiv N : \lambda m.m(\lambda x_1.(P_1 : K))(\lambda x_2.(P_2 : K))$ は $P_1 : K$ の自由変数を全て含み，従って K の自由変数を全て含む.

$M \equiv \mu a.N$ **のとき．** M の型が $\bot$ でないことより，a の型は $\bot$ でない．また，M は空疎でないことより，N は自由変数として a を含む．よって (i) に関する帰納法の仮定により，$N : \lambda x.x$ は k_a を含むから，$M : K \equiv (N : \lambda x.x)[k_a := K]$ は K の自由変数を全て含む.

他の場合も同様に証明できる.

$\square$

命題 3.6 $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ 項 M について，$M \to N$ ならば $\overline{\overline{M}} \to^* \overline{\overline{N}}$ が成立する．とくに，M が型をもち，空疎でなければ，以下が成り立つ.

- $M \to_\beta N$ ならば $\overline{\overline{M}} \to^+ \overline{\overline{N}}$,
- $M \to_{\delta\mu} N$ ならば $\overline{\overline{M}} \equiv \overline{\overline{N}}$.

証明. 任意の λ 項 K に関して $M : K \to^* N : K$ であることと同時に，$M \to N$ に関する帰納法で示す．ここで，次の補題を利用する．任意の P，K，M_i について，次が成立する.

- $(P : K)[k := K'] \equiv P : K[k := K']$ (P が k を含まないとき)
- $(P : K)[x := \overline{\overline{M_1}}] \to^* P[x := M_1] : K[x := \overline{\overline{M_1}}]$
- $(P : K)[k_a := \lambda m.m\overline{\overline{M_1}}k_a] \equiv P[a \Leftarrow [\,]M_1] : K[k_a := \lambda m.m\overline{\overline{M_1}}k_a]$
- $(P : K)[k_a := \lambda x.x(\lambda y_1 y_2.y_j k_a)] \equiv P[a \Leftarrow \pi_j[\,]] : K[k_a := \lambda x.x(\lambda y_1 y_2.y_j k_a)]$
- $(P : K)[k_a := \lambda m.m(\lambda x_1.(M_1 : k_a))(\lambda x_2.(M_2 : k_a))] \equiv P[a \Leftarrow \delta([\,], x_1.M_1, x_2.M_2)] : K[k_a := \lambda m.m(\lambda x_1.(M_1 : k_a))(\lambda x_2.(M_2 : k_a))]$

これらは P に関する帰納法によって証明できる.

($\beta_\to$) $M \equiv (\lambda x.P)Q$**，**$N \equiv P[x := Q]$ **の場合．** 以下のとおり証明される.

$$\begin{aligned}
M : K &\equiv (\lambda m.m\overline{\overline{N}}K)(\lambda x.\overline{\overline{P}}) \\
&\to^+ \overline{\overline{P}}[x := \overline{\overline{N}}]K \\
&\equiv (\lambda k.(P : k)[x := \overline{\overline{N}}])K \\
&\to^* (\lambda k.(P[x := N] : k))K \quad (\text{補題より}) \\
&\to P[x := N] : K
\end{aligned}$$

他の β 規則に関しても同様である.

(δ) の場合．

$$\begin{aligned}
M &\equiv \mathcal{C}[\delta(Q, x_1.P_1, x_2.P_2)], \\
N &\equiv \delta(Q, x_1.\mathcal{C}[P_1], x_2.\mathcal{C}[P_2])
\end{aligned}$$

とする．例えば $\mathcal{C} = \pi_1[\,]$ のときは以下のとおり証明される．ここで,

$$\begin{aligned}
K_1 &\equiv \lambda x.x(\lambda y_1 y_2.y_1 K) \\
K_2 &\equiv \lambda m.m(\lambda x_1.(P_1 : K_1))(\lambda x_2.(P_2 : K_1))
\end{aligned}$$

とすると，任意の P について $P : K_1 \equiv \pi_1 P : K$ であるから,

$$K_2 \equiv \lambda m.m(\lambda x_1.(\pi_1 P_1 : K))(\lambda x_2.(\pi_1 P_2 : K))$$

である．従って，

$$\begin{aligned} M : K &\equiv \delta(Q, x_1.P_1, x_2.P_2) : K_1 \\ &\equiv Q : K_2 \\ &\equiv \delta(Q, x_1.\pi_1 P_1, x_2.\pi_1 P_2) : K \\ &\equiv N : K \end{aligned}$$

である．

(μ) $M \equiv \mathcal{C}[\mu a.P]$，$N \equiv \mu a.P[a \Leftarrow \mathcal{C}]$ **の場合．** 例えば，$\mathcal{C} = \pi_1[]$ のとき，$K' \equiv \lambda x.x(\lambda y_1 y_2.y_1 k_a)$ とすると

$$\begin{aligned} M : K &\equiv \mu a.P : \lambda x.x(\lambda y_1 y_2.y_1 K) \\ &\equiv (\mu a.P : K')[k_a := K] \\ &\equiv (P : \lambda x.x)[k_a := K'][k_a := K] \\ &\equiv (P[a \Leftarrow \pi_1[]] : \lambda x.x)[k_a := K] \quad (\text{補題より}) \\ &\equiv \mu a.P[a \Leftarrow \pi_1[]] : K \end{aligned}$$

と証明される．

その他の場合は帰納法の仮定と補題 3.5 から証明される．例えば，$M_1 M_2 \to_\beta M_1 N_2$ ($M_2 \to_\beta N_2$) のときは次のとおり証明される．帰納法の仮定により $\overline{\overline{M_2}} \to^+ \overline{\overline{N_2}}$ であり，M_1 は $\alpha \to \beta$ の形の型を持つから補題 3.5(ii) より $M_1 : k$ は k を含む．よって，以下のとおりである．

$$\begin{aligned} M_1 M_2 : K &\equiv M_1 : \lambda m.m\overline{\overline{M_2}}K \\ &\equiv (M_1 : k)[k := \lambda m.m\overline{\overline{M_2}}K] \\ &\to^+ (M_1 : k)[k := \lambda m.m\overline{\overline{N_2}}K] \\ &\equiv M_1 N_2 : K \end{aligned}$$

□

3.2 増加項

$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ の項 M の**増加項** M^+ とは，M と意味が同じであって，かつ空疎でない項のことである．増加項に対しては継続消滅が起こらない．また，任意の $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ 項間の簡約に対して，その増加項間にも簡約関係があることが解る．これらの事実によって，強正規化性を証明する．

定義 3.7 (増加項) 各型 α について λ 変数 c_α を用意する．$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ 項 M に対し，**増加項**の集合 $\mathrm{Aug}(M)$ を図 4 のとおり定義する．また，単一除去文脈 $\mathcal{C}$ に対して $\mathrm{Aug}(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ 中の項をその増加項にそれぞれ置き換えた単一除去文脈の全体とする．例えば $\mathrm{Aug}([]M)$ は $[]M^+$ ($M^+ \in \mathrm{Aug}(M)$) なる形の単一除去文脈の全体とする．

補題 3.8 任意の M について，その任意の増加項 $M^+ \in \mathrm{Aug}(M)$ は空疎でない．

証明. $\mathrm{Aug}(\mu a.M)$ の定義より明らかである． □

命題 3.9 (i) 任意の型をもつ項 M に対し，型をもつ増加項が存在する．より詳細には，$\Gamma \vdash M : \alpha; \Delta$ ならば，$c_\beta : \beta$ の形の型宣言の集合 Π と増加項 $M^+ \in \mathrm{Aug}(M)$ が存在して，$\Gamma, \Pi \vdash M^+ : \alpha; \Delta$ が導出可能である．

(ii) $M \to_\bullet N$ ($\bullet = \beta$, δ または μ) かつ $M^+ \in \mathrm{Aug}(M)$ ならば，増加項 $N^+ \in \mathrm{Aug}(N)$ が存在して $M^+ \to_\bullet N^+$ が成り立つ．

証明. (i) $\Gamma \vdash M : \alpha; \Delta$ の導出に関する帰納法による．

(ii) $M \to_\bullet N$ に関する帰納法による．この際，次の補題を利用する．任意の項 M_i，単一除去文脈 $\mathcal{C}$ と，任意の増加項 $M_i^+ \in \mathrm{Aug}(M_i)$，$\mathcal{C}^+ \in \mathrm{Aug}(\mathcal{C})$ に対して，

- $M_1^+[x := M_2^+] \in \mathrm{Aug}(M_1[x := M_2])$
- $M_1^+[a \Leftarrow \mathcal{C}^+] \in \mathrm{Aug}(M_1[a \Leftarrow \mathcal{C}])$

これらは容易に示すことができる．

($\beta_\to$) $M \equiv (\lambda x.P_1)P_2$，$N \equiv P_1[x := P_2]$ **の場合**． 任意の $M^+ \in \mathrm{Aug}(M)$ は，$M^+ \equiv (\lambda x.P_1^+)P_2^+$ の形をしている．ここで $P_i^+ \in \mathrm{Aug}(P_i)$ である．このとき，$M^+ \to_\beta P_1^+[x := P_2^+]$ であり，補題より右辺は $N \equiv P_1[x := P_2]$ の増加項である．

他の β 規則についても同様である．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Aug}(x) &= \{x\} \\
\mathrm{Aug}(\lambda x.M) &= \{\lambda x.M^+ \mid M^+ \in \mathrm{Aug}(M)\} \\
\mathrm{Aug}(MN) &= \{M^+N^+ \mid M^+ \in \mathrm{Aug}(M), N^+ \in \mathrm{Aug}(N)\} \\
\mathrm{Aug}(\langle M_1, N_2\rangle) &= \{\langle M_1^+, M_2^+\rangle \mid M_j^+ \in \mathrm{Aug}(M_j)\} \\
\mathrm{Aug}(\pi_j M) &= \{\pi_j M^+ \mid M^+ \in \mathrm{Aug}(M)\} \\
\mathrm{Aug}(\iota_j M) &= \{\iota_j M^+ \mid M^+ \in \mathrm{Aug}(M)\} \\
\mathrm{Aug}(\delta(M, x_1.P_1, x_2.P_2) &= \{\delta(M^+, x_1.P_1^+, x_2.P_2^+) \mid M^+ \in \mathrm{Aug}(M), P_j^+ \in \mathrm{Aug}(P_j)\} \\
\mathrm{Aug}(aM) &= \{aM^+ \mid M^+ \in \mathrm{Aug}(M)\} \\
\mathrm{Aug}(\mu a.M) &= \{\mu a.(\lambda z.M^+)(a\mathcal{K}[c_\alpha]) \mid M^+ \in \mathrm{Aug}(M),\ z \text{ は } M^+ \text{ 中自由に現れない}, \\
&\qquad \alpha \text{ は任意の型},\ \mathcal{K}[c_\alpha] \text{ は空疎でない } \}
\end{aligned}
$$

図 4: $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ 項の増加項

(δ) の場合.

$$
\begin{aligned}
M &\equiv \mathcal{C}[\delta(Q, x_1.P_1, x_2.P_2)], \\
N &\equiv \delta(Q, x_1.\mathcal{C}[P_1], x_2.\mathcal{C}[P_2])
\end{aligned}
$$

とすると， $M^+ \in \mathrm{Aug}(M)$ は

$$M^+ \equiv \mathcal{C}^+[\delta(Q^+, x_1.P_1^+, x_2.P_2^+)]$$

の形である．このとき，

$$M^+ \to_\delta \delta(Q^+, x_1.\mathcal{C}^+[P_1^+], x_2.\mathcal{C}^+[P_2^+])$$

であるが，この右辺は N の増加項である．

(μ) の場合.

$$M \equiv \mathcal{C}[\mu a.P],\ N \equiv \mu a.P[a \Leftarrow \mathcal{C}]$$

とすると，$M^+ \in \mathrm{Aug}(M)$ は，

$$M^+ \equiv \mathcal{C}^+[\mu a.(\lambda z.P^+)(a\mathcal{K}[c])]$$

の形である．このとき，

$$M^+ \to_\mu \mu a.(\lambda z.P^+[a \Leftarrow \mathcal{C}^+])(a\mathcal{C}^+[\mathcal{K}[c]])$$

であり，上の補題と $\mathcal{C}^+[\mathcal{K}[c]]$ が空疎でないことより，この右辺は N の増加項である．

その他の場合は，帰納法の仮定より証明できる． □

3.3 $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の強正規化性

以上より，$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の強正規化性が証明できる．

まず，[4] において，$\delta\mu$ 簡約に関しては，型をもたない項をも含めて強正規化性が証明されている．

命題 3.10 ([4]) 任意の（型をもたないものも含む）$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の項は $\delta\mu$ 簡約について強正規化可能である．

証明. $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ 項のノルム $|M|$ を正の自然数として定義し，$M \to_{\delta\mu} N$ ならば $|M| > |N|$ であることが証明できる [4]. □

定理 3.11 任意の型をもつ $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ 項は $\beta\delta\mu$ 簡約について強正規化可能である．

証明. 型をもつ $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ 項 M_0 から始まる無限簡約列 $M_0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots$ が存在したとする．このとき，M_0 の型をもつ増加項 M_0^+ と，各 M_i の増加項 M_i^+ が存在し，空疎でない項からなる無限簡約列 $M_0^+ \to M_1^+ \to M_2^+ \to \cdots$ がとれる．さらに，各項の CPS 変換をとれば，$\overline{\overline{M_0^+}} \to^* \overline{\overline{M_1^+}} \to^* \overline{\overline{M_2^+}} \to^* \cdots$ となる．ここで，$M_i \to_\beta M_{i+1}$ なるステップに関しては，$M_i^+ \to_\beta M_{i+1}^+$ であり，M_i^+ が空疎でないことと合わせて，$\overline{\overline{M_i^+}} \to^+ \overline{\overline{M_{i+1}^+}}$ が得

られる．また，$M_i \to_{\delta\mu} M_{i+1}$ なるステップに関しては，$\overline{\overline{M_i^+}} \equiv \overline{\overline{M_{i+1}^+}}$ である．$\delta\mu$ の強正規化性より，$M_0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots$ 中には無限に多くの β 簡約のステップが現れる．よって，$\overline{\overline{M_0^+}} \to^* \overline{\overline{M_1^+}} \to^* \overline{\overline{M_2^+}} \to^* \cdots$ は無限簡約列である．これは単純型付 λ 計算の強正規化性に反する． □

4 一般的除去規則をもつ自然演繹古典論理の強正規化性

この章では $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の含意，連言に対する除去規則を一般化した体系 $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ を定義し，この体系の強正規化性を前章と同様の方法で証明する．

4.1 $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ の定義

まず，一般的除去規則をもつ自然演繹古典論理の体系 $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ を定義する．

選言の除去規則 ($\vee$E) は，シーケント計算における左規則に近い形をしているが，含意，連言の除去規則を同様の方法で定義することによって，シーケント計算との関連を調べる際により扱いやすい形で自然演繹体系を定義することができる．実際に，[15] で von Plato は除去規則を統一的な形で定義した自然演繹体系を与え，その体系における証明とシーケント計算の証明との間の一対一対応を与えている．この体系における連言，含意の除去規則

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2; \Delta \quad \Gamma, A_1, A_2 \vdash C; \Delta}{\Gamma \vdash C; \Delta} \ (\wedge\mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B; \Delta \quad \Gamma \vdash A; \Delta \quad \Gamma, B \vdash C; \Delta}{\Gamma \vdash C; \Delta} \ (\to\mathrm{E})$$

は，普通の自然演繹における除去規則の一般化になっており，**一般的除去規則** (general elimination) と呼ぶ．実際，$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ における選言，含意の除去は一般的除去規則の特殊な場合として

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash A_1 \wedge A_2; \Delta\end{array} \quad \overline{\Gamma, A_1, A_2 \vdash A_1; \Delta}}{\Gamma \vdash A_j; \Delta} \ (\wedge\mathrm{E})$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash A \to B; \Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash A; \Delta\end{array} \quad \overline{\Gamma, B \vdash B; \Delta}}{\Gamma \vdash B; \Delta} \ (\to\mathrm{E})$$

で，それぞれ表現可能である．普通の除去規則と一般除去規則との関係の詳細は次章で述べる．

定義 4.1 ($\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$) (i) $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ の型は $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の型と同じである．

(ii) 項は，除去規則に対応する部分を変更する．除去規則を統一的に扱うことを明示的にするため，選言の除去規則に対応する項の構成子を表す記号を δ から $E^{\vee}$ に変更する．

$$\begin{array}{rcl} M, N, P & ::= & x \mid \lambda x.M \mid E^{\to}(M, N, x.P) \\ & & \mid \langle M, N \rangle \mid E^{\wedge}(M, (x_1, x_2).P) \\ & & \mid \iota_j M \mid E^{\vee}(M, x_1.P_1, x_2.P_2) \\ & & \mid aM \mid \mu a.M \end{array}$$

この変更に伴い，**除去文脈**の定義も変更する

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{K} & ::= & [] \mid E^{\to}(\mathcal{K}, N, x.P) \mid E^{\wedge}(\mathcal{K}, (x_1, x_2).P) \\ & & \mid E^{\vee}(\mathcal{K}, x_1.P_1, x_2.P_2) \end{array}$$

単一除去文脈の定義も同様に変更する．

(iii) 型付け規則については，除去規則のみ図 5 のとおり変更する．また，$\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ の簡約規則は図 6 のとおりである．

4.2 CPS 変換

$\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ の CPS 変換を定義する．新たに導入した $E^{\to}$，$E^{\wedge}$ 以外の部分は $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の CPS 変換と同じである．

定義 4.2 (CPS 変換) $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ 項 M の **CPS 変換**を $\overline{\overline{M}} \equiv \lambda k.(M : k)$ と定義する．ここで，$\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \alpha \to \beta ; \Delta \quad \Gamma \vdash N : \alpha ; \Delta \quad \Gamma, x : \beta \vdash P : \gamma ; \Delta}{\Gamma \vdash E^{\to}(M, N, x.P) : \gamma ; \Delta} \ (\to\mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \alpha_1 \wedge \alpha_2 ; \Delta \quad \Gamma, x_1 : \alpha_1, x_2 : \alpha_2 \vdash P : \gamma ; \Delta}{\Gamma \vdash E^{\wedge}(M, (x_1, x_2).P) : \gamma ; \Delta} \ (\wedge\mathrm{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \alpha_1 \vee \alpha_2 ; \Delta \quad \Gamma, x_1 : \alpha_1 \vdash P_1 : \gamma ; \Delta \quad \Gamma, x_2 : \alpha_2 \vdash P_2 : \gamma ; \Delta}{\Gamma \vdash E^{\vee}(M, x_1.P_1, x_2.P_2) : \gamma ; \Delta} \ (\vee\mathrm{E})$$

図 5: $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\perp}$ の型付け規則（除去規則のみ抜粋）

$$\begin{array}{clcl}
(\beta_{\to}) & E^{\to}(\lambda y.M, N, x.P) & \to_\beta & P[x := M[y := N]] \\
(\beta_{\wedge}) & E^{\wedge}(\langle M_1, M_2 \rangle, (x_1, x_2).P) & \to_\beta & P[x_1 := M_1][x_2 := M_2] \\
(\beta_{\vee}) & E^{\vee}(\iota_j M, x_1.P_1, x_2.P_2) & \to_\beta & P_j[x_j := M] \\
 & & & \\
(\delta) & \mathcal{C}[\mathcal{C}'[M]] & \to_\delta & (\mathcal{C}' \star \mathcal{C})[M] \\
 & & & \\
(\mu) & \mathcal{C}[\mu a.M] & \to_\mu & \mu a.M[a \Leftarrow \mathcal{C}],
\end{array}$$

ここで，単一除去文脈 $\mathcal{C}$，$\mathcal{C}'$ の**置換** $\mathcal{C}' \star \mathcal{C}$ を以下で定義する．

$$\begin{aligned}
E^{\to}([], N, x.P) \star \mathcal{C} &\equiv E^{\to}([], N, x.\mathcal{C}[P]) \\
E^{\wedge}([], (x_1, x_2).P) \star \mathcal{C} &\equiv E^{\wedge}([], (x_1, x_2).\mathcal{C}[P]) \\
E^{\vee}([], x_1.P_1, x_2.P_2) \star \mathcal{C} &\equiv E^{\vee}([], x_1.\mathcal{C}[P_1], x_2.\mathcal{C}[P_2])
\end{aligned}$$

図 6: $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\perp}$ の簡約規則

項 M と λ 項 K に対して $M:K$ は以下で定義される．

$$
\begin{aligned}
x:K &\equiv xK \\
\lambda x.M:K &\equiv K(\lambda x.\overline{\overline{M}}) \\
\langle M,N\rangle:K &\equiv K(\lambda x.x\overline{\overline{M}}\ \overline{\overline{N}}) \\
\iota_j M:K &\equiv K(\lambda y_1 y_2.y_j\overline{\overline{M}}) \\
\mathcal{C}[M]:K &\equiv M:(\mathcal{C}::K) \\
aM:K &\equiv M:k_a \quad (k_a \text{ は } \lambda \text{ 変数}) \\
\mu a.M:K &\equiv (M:\lambda x.x)[k_a:=K]
\end{aligned}
$$

ここで，$\mathcal{C}$ は任意の単一除去文脈であり，$\mathcal{C}::K$ は以下で定義される．

$$
\begin{aligned}
E^{\to}([],M,x.P)::K &\equiv \\
&\quad \lambda y.(\lambda x.(P:K))(y\overline{\overline{M}}) \\
E^{\wedge}([],(x_1,x_2).P)::K &\equiv \lambda y.y(\lambda x_1x_2.(P:K)) \\
E^{\vee}([],x_1.P_1,x_2.P_2)::K &\equiv \\
&\quad \lambda y.y(\lambda x_1.(P_1:K))(\lambda x_2.(P_2:K))
\end{aligned}
$$

論理式の二重否定変換，および項が空疎であることの定義は，それぞれ定義 3.2，定義 3.4 と全く同様である．

命題 4.3 $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\perp}$ で M が型をもてば，単純型付 λ 計算で $\overline{\overline{M}}$ が型をもつ．より詳細には，$\Gamma \vdash M:\alpha;\Delta$ が導出可能なとき，単純型付 λ 計算において $\overline{\overline{\Gamma}},\neg\Delta^* \vdash \overline{\overline{M}}:\overline{\overline{\alpha}}$ が導出可能である．

証明. $\Gamma \vdash M:\alpha;\Delta$ の導出に関する帰納法による． □

直感的に，単一除去文脈 $\mathcal{C}$ は継続の一部と見ることができるが，このとき $\mathcal{C}::K$ は二つの継続 $\mathcal{C}$ と K の合成になっている．この合成演算と単一除去文脈の置換演算 $\star$ との間には次の補題のような関係がある．

補題 4.4 任意の単一除去文脈 $\mathcal{C}$，$\mathcal{C}'$ について，$(\mathcal{C}'\star\mathcal{C})::K \equiv \mathcal{C}'::(\mathcal{C}::K)$ である．

証明. $\mathcal{C}'$ の形に関して場合分けをすることにより簡単に証明できる． □

これにより，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}[\mathcal{C}'[M]]:K &\equiv M:(\mathcal{C}'::(\mathcal{C}::K)) \\
&\equiv M:((\mathcal{C}'\star\mathcal{C})::K) \\
&\equiv (\mathcal{C}'\star\mathcal{C})[M]:K
\end{aligned}
$$

であるから，CPS 変換が置換簡約に対して不変であることがわかる．さらに β，μ についても $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ のときと同様，簡約関係 $\to^*$ を保存する．

補題 4.5 $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\perp}$ 項 M は型をもち，空疎でなく，さらに K は任意の λ 項とするとき，以下が成り立つ．

(i) M が a を自由変数として含み，a の型が $\perp$ でないならば，$M:K$ は k_a を自由変数として含む．

(ii) M の型が $\perp$ でないとき，$M:K$ は自由変数として K の自由変数を全て含む．

証明. M に関する帰納法による． □

命題 4.6 $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\perp}$ 項 M について，$M \to N$ ならば $\overline{M} \to^* \overline{N}$ が成立する．とくに，M が型をもち空疎でない場合，以下が成り立つ．

- $M \to_\beta N$ ならば $\overline{M} \to^+ \overline{N}$,
- $M \to_{\delta\mu} N$ ならば $\overline{M} \equiv \overline{N}$.

証明. 任意の λ 項 K について，$M:K \to^* N:K$ であることと同時に，$M \to N$ に関する帰納法によって証明する．証明は $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ のときと同様，補題 4.5 と次の補題により証明できる．

- $(P:K)[x:=\overline{\overline{M_1}}] \to^* P[x:=M_1]:K[x:=\overline{\overline{M_1}}]$
- $(P:K)[k_a := \mathcal{C}::k_a] \equiv P[a \Leftarrow \mathcal{C}]:K[k_a := \mathcal{C}::k_a]$

□

4.3 増加項

$\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\perp}$ の増加項およびその性質は $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ の場合と同様である．

定義 4.7 (増加項) $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ 項 M の**増加項**の集合 $\mathrm{Aug}(M)$ は $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の場合と同様に定義する．例えば $\mathrm{Aug}(E^{\to}(M, N, x.P)$ の定義は以下のようになる．

$$\{E^{\to}(M^+, N^+, x.P^+) \mid \\ M^+ \in \mathrm{Aug}(M), N^+ \in \mathrm{Aug}(N), P^+ \in \mathrm{Aug}(P)\}$$

補題 4.8 任意の M について，その任意の増加項 $M^+ \in \mathrm{Aug}(M)$ は空疎でない．

証明. $\mathrm{Aug}(\mu a.M)$ の定義により明らかである． □

命題 4.9 (i) 任意の型をもつ項 M に対し，型をもつ増加項が存在する．より詳細には，$\Gamma \vdash M : \alpha; \Delta$ ならば，$c_\beta : \beta$ の形の型宣言の集合 Π と増加項 $M^+ \in \mathrm{Aug}(M)$ が存在して，$\Gamma, \Pi \vdash M^+ : \alpha; \Delta$ が導出可能である．

(ii) $M \to_\bullet N$ ($\bullet = \beta$，δ または μ) かつ $M^+ \in \mathrm{Aug}(M)$ ならば，増加項 $N^+ \in \mathrm{Aug}(N)$ が存在して $M^+ \to_\bullet N^+$ が成り立つ．

証明. $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ のときと同様に証明できる． □

4.4 $\delta\mu$ 簡約の強正規化性

$\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ の $\delta\mu$ 簡約の強正規化性を示す．これは，de Groote が $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ 項に対して定義したノルム [4] を $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ 項に自然に拡張することによって証明する．$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ の場合と同様，$\delta\mu$ 簡約の強正規化性は型をもたない項に対しても示すことができる．

定義 4.10 (ノルム) $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ 項に対してノルム $|M|$ および補助概念 $\#M$，$\lfloor M \rfloor_a$ を以下のとおり定義する．

(i) $|M|$ および $|\mathcal{C}|$.

$$\begin{aligned} |x| &= 1 & |\lambda x.M| &= |M| \\ |\langle M, N\rangle| &= |M| + |N| & |\iota_j M| &= |M| \\ |\mu a.M| &= |M| & |aM| &= |M| \\ |\mathcal{C}[M]| &= |M| + \#M|\mathcal{C}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |E^{\to}([], N, x.P)| &= |N| + |P| \\ |E^{\wedge}([], (x, y).P)| &= |P| \\ |E^{\vee}([], x_1.P_1, x_2.P_2)| &= |P_1| + |P_2| \end{aligned}$$

(ii) $\#M$ および $\#\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} \#x &= 1 & \#\lambda x.M &= 1 \\ \#\langle M, N\rangle &= 1 & \#(\iota_j M) &= 1 \\ \#\mu a.M &= \lfloor M \rfloor_a + 1 & \#aM &= 1 \\ \#\mathcal{C}[M] &= 2\#M\#\mathcal{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \#E^{\to}([], N, x.P) &= \#N + \#P \\ \#E^{\wedge}([], (x, y).P) &= \#P \\ \#E^{\vee}([], x_1.P_1, x_2.P_2) &= \#P_1 + \#P_2 \end{aligned}$$

(iii) $\lfloor M \rfloor_a$ および $\lfloor \mathcal{C} \rfloor_a$.

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor_a &= 0 & \lfloor \lambda x.M \rfloor_a &= \lfloor M \rfloor_a \\ \lfloor \iota_j M \rfloor_a &= \lfloor M \rfloor_a & \lfloor \mu b.M \rfloor_a &= \lfloor M \rfloor_a \\ \lfloor \langle M, N\rangle \rfloor_a &= \lfloor M \rfloor_a + \lfloor N \rfloor_a \\ \lfloor bM \rfloor_a &= \lfloor M \rfloor_a \quad (a \not\equiv b) \\ \lfloor aM \rfloor_a &= \lfloor M \rfloor_a + \#M \\ \lfloor \mathcal{C}[M] \rfloor_a &= \lfloor M \rfloor_a + \#M \lfloor \mathcal{C} \rfloor_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lfloor E^{\to}([], N, x.P) \rfloor_a &= \lfloor N \rfloor_a + \lfloor P \rfloor_a \\ \lfloor E^{\wedge}([], (x, y).P) \rfloor_a &= \lfloor P \rfloor_a \\ \lfloor E^{\vee}([], x_1.P_1, x_2.P_2) \rfloor_a &= \lfloor P_1 \rfloor_a + \lfloor P_2 \rfloor_a \end{aligned}$$

補題 4.11 A は任意の項または単一除去文脈を表すメタ変数とする．

(i) $|A| \geq 1$，$\#A \geq 1$，および $\lfloor A \rfloor_a \geq 0$ である．

(ii) a が A 中自由に現われないならば $\lfloor A \rfloor_a = 0$ である．

証明. いずれも，定義より明らかである． □

補題 4.12 $a \notin FV(\mathcal{C})$ とするとき，以下が成立する．

(i) $\#M[a \Leftarrow \mathcal{C}] = \#M$,

(ii) $a \not\equiv b$ ならば $\lfloor M[a \Leftarrow \mathcal{C}] \rfloor_b = \lfloor M \rfloor_b + \lfloor M \rfloor_a \lfloor \mathcal{C} \rfloor_b$,

(iii) $\lfloor M[a \Leftarrow \mathcal{C}] \rfloor_a = 2 \lfloor M \rfloor_a \# \mathcal{C}$,

(iv) $|M[a \Leftarrow \mathcal{C}]| = |M| + \lfloor M \rfloor_a |\mathcal{C}|$.

証明. 全て M に関する帰納法によって証明できる. □

命題 4.13 $M \to_{\delta\mu} N$ ならば, $|M| > |N|$ である.

証明. $M \to_{\delta\mu} N$ の定義に関する帰納法によって, $|M| > |N|$ かつ $\#M \geq \#N$ かつ $\lfloor M \rfloor_a \geq \lfloor N \rfloor_a$ を証明する. このとき以下の補題を用いる. 任意の単一除去文脈 $\mathcal{C}_i$ に対して以下が成り立つ.

- $|\mathcal{C}_1| + 2\#\mathcal{C}_1 |\mathcal{C}_2| > |\mathcal{C}_1 \star \mathcal{C}_2|$
- $2\#\mathcal{C}_1 \#\mathcal{C}_2 \geq \#\mathcal{C}_1 \star \mathcal{C}_2$
- $\lfloor \mathcal{C}_1 \rfloor_a + 2\#\mathcal{C}_1 \lfloor \mathcal{C}_2 \rfloor_a \geq \lfloor \mathcal{C}_1 \star \mathcal{C}_2 \rfloor_a$

これらは $\mathcal{C}_1$ の形による場合分けによって容易に証明できる.

(δ) $M \equiv \mathcal{C}[\mathcal{C}'[P]]$, $N \equiv (\mathcal{C}' \star \mathcal{C})[P]$ **の場合.** 次のとおり証明される.

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}[\mathcal{C}'[P]]| &= |\mathcal{C}'[P]| + \#\mathcal{C}'[P]|\mathcal{C}| \\ &= |P| + \#P|\mathcal{C}'| + 2\#P\#\mathcal{C}'|\mathcal{C}| \\ &= |P| + \#P(|\mathcal{C}'| + 2\#\mathcal{C}'|\mathcal{C}|) \\ &> |P| + \#P|\mathcal{C}' \star \mathcal{C}| \quad (\text{補題より}) \\ &= |(\mathcal{C}' \star \mathcal{C})[P]| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \#\mathcal{C}[\mathcal{C}'[P]] &= 4\#P\#\mathcal{C}'\#\mathcal{C} \\ &\geq 2\#P\#(\mathcal{C}' \star \mathcal{C}) \quad (\text{補題より}) \\ &= \#(\mathcal{C}' \star \mathcal{C})[P] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lfloor \mathcal{C}[\mathcal{C}'[P]] \rfloor_a &= \lfloor \mathcal{C}'[P] \rfloor_a + \#\mathcal{C}'[P] \lfloor \mathcal{C} \rfloor_a \\ &= \lfloor P \rfloor_a + \#P(\lfloor \mathcal{C}' \rfloor_a + 2\#\mathcal{C}' \lfloor \mathcal{C} \rfloor_a) \\ &\geq \lfloor P \rfloor_a + \#P \lfloor \mathcal{C}' \star \mathcal{C} \rfloor_a \quad (\text{補題より}) \\ &= \lfloor (\mathcal{C}' \star \mathcal{C})[P] \rfloor_a \end{aligned}$$

(μ) $M \equiv \mathcal{C}[\mu a.P]$, $N \equiv \mu a.P[a \Leftarrow \mathcal{C}]$ **の場合.** 次のとおり証明される.

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}[\mu a.P]| &= |\mu a.P| + \#\mu a.P|\mathcal{C}| \\ &= |P| + (\lfloor P \rfloor_a + 1)|\mathcal{C}| \\ &> |P| + \lfloor P \rfloor_a |\mathcal{C}| \quad (|\mathcal{C}| \geq 1 \text{ より}) \\ &= |P[a \Leftarrow \mathcal{C}]| \quad (\text{補題 4.12 (vi) より}) \\ &= |\mu a.P[a \Leftarrow \mathcal{C}]| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \#\mathcal{C}[\mu a.P] &= 2\#\mu a.P\#\mathcal{C} \\ &= 2(\lfloor P \rfloor_a + 1)\#\mathcal{C} \\ &\geq 2\lfloor P \rfloor_a \#\mathcal{C} + 1 \quad (2\#\mathcal{C} \geq 1 \text{ より}) \\ &= \lfloor P[a \Leftarrow \mathcal{C}] \rfloor_a + 1 \quad (\text{補題 4.12 (iii) より}) \\ &= \#\mu a.P[a \Leftarrow \mathcal{C}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lfloor \mathcal{C}[\mu a.P] \rfloor_b &= \lfloor \mu a.P \rfloor_b + \#\mu a.P \lfloor \mathcal{C} \rfloor_b \\ &= \lfloor P \rfloor_b + (\lfloor P \rfloor_a + 1) \lfloor \mathcal{C} \rfloor_b \\ &\geq \lfloor P \rfloor_b + \lfloor P \rfloor_a \lfloor \mathcal{C} \rfloor_b \\ &= \lfloor P[a \Leftarrow \mathcal{C}] \rfloor_b \quad (\text{補題 4.12 (ii) より}) \\ &= \lfloor \mu a.P[a \Leftarrow \mathcal{C}] \rfloor_b \end{aligned}$$

その他の場合は帰納法の仮定と次の事実から証明できる. 任意の（除去文脈とは限らない）文脈 $\mathcal{E}$ と, 任意の項 M, N に対し, $|M| > |N|$ かつ $\#M \geq \#N$ かつ $\lfloor M \rfloor_a \geq \lfloor N \rfloor_a$ ならば, $|\mathcal{E}[M]| > |\mathcal{E}[N]|$ かつ $\#\mathcal{E}[M] \geq \#\mathcal{E}[N]$ かつ $\lfloor \mathcal{E}[M] \rfloor_a \geq \lfloor \mathcal{E}[N] \rfloor_a$ である. □

定理 4.14 任意の（型をもたないものも含む）$\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ の項は $\delta\mu$ 簡約について強正規化可能である.

証明. 命題 4.13 による. □

4.5 $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ の強正規化性

以上より, $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ の強正規化性は $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\bot}$ のときと全く同様に証明できる.

定理 4.15 任意の型をもつ $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\bot}$ 項は $\beta\delta\mu$ 簡約に関して強正規化可能である.

5　$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ の $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\perp}$ への埋め込み

この章では，一般的除去規則が実際に従来の除去規則の一般化になっていることを，$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ から $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\perp}$ への埋めこみを与えることによって示す．この埋め込みは簡約ステップをもこめたものであり，これによって $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ の強正規化性が $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\perp}$ の強正規化性に簡単に帰着できる．

定義 5.1 $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ 項 M の $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\perp}$ への埋め込み M^* を以下のとおり定義する．

$$\begin{aligned}
x^* &\equiv x \\
(\lambda x.M)^* & \lambda x.M^* \\
\langle M,N\rangle^* &\equiv \langle M^*,N^*\rangle \\
(\iota_j M)^* &\equiv \iota_j M^* \\
(MN)^* &\equiv E^{\to}(M^*,N^*,x.x) \\
(\pi_j M)^* &\equiv E^{\wedge}(M^*,(x_1,x_2).x_j) \\
\delta(M,x_1.P_1,x_2.P_2)^* &\equiv E^{\vee}(M^*,x_1.P_1^*,x_2.P_2^*) \\
(\mu a.M)^* &\equiv \mu a.M^* \\
(aM)^* &\equiv aM^*
\end{aligned}$$

命題 5.2 (i) $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ で $\Gamma\vdash M:\alpha;\Delta$ が導出可能ならば，$\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\perp}$ で $\Gamma\vdash M^*:\alpha;\Delta$ が導出可能である．

(ii) $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ で $M\to_\bullet N$（$\bullet=\beta$，δ または μ）ならば，$\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\perp}$ で $M^*\to_\bullet N^*$ である．

証明. (i) $\Gamma\vdash M:\alpha;\Delta$ の導出に関する帰納法による．

(ii) 任意の項 M，N について $M[x:=N]^*\equiv M^*[x:=N^*]$ であることが M に関する帰納法で証明できる．この事実を使えば $M\to_\bullet N$ の定義に関する帰納法で証明できる．各 β 簡約は埋め込んだ先では以下のようになる．

$$\begin{aligned}
(\beta_\to)\quad & ((\lambda x.M)N)^* \\
&\equiv E^{\to}(\lambda x.M^*,N^*,y.y) \\
&\to_\beta y[y:=M^*[x:=N^*]] \\
&\equiv (M[x:=N])^* \\
(\beta_\wedge)\quad & (\pi_j\langle M_1,M_2\rangle)^* \\
&\equiv E^{\wedge}(\langle M_1^*,M_2^*\rangle,(x_1,x_2).x_j) \\
&\to_\beta x_j[x_1:=M_1^*][x_2:=M_2^*] \\
&\equiv M_j^* \\
(\beta_\vee)\quad & \delta(\iota_j M,x_1.P_1,x_2.P_2)^* \\
&\equiv E^{\vee}(\iota_j M^*,x_1.P_1^*,x_2.P_2^*) \\
&\to_\beta P_j^*[x_j:=M^*] \\
&\equiv (P_j[x_j:=M])^*
\end{aligned}$$

□

この命題より，$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ における無限簡約列の存在は $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\perp}$ の無限簡約列の存在を導くことがわかる．すなわち，$\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ の強正規化性は，この埋め込みによって $\lambda\mu_g^{\to\wedge\vee\perp}$ の強正規化性に帰着できる．

6　おわりに

置換簡約を含む自然演繹の強正規化性は，直観主義論理の場合について de Groote が [5] で証明を与えている．[5] では，連言，選言，含意を含む自然演繹直観主義論理から含意のみを含む体系，すなわち単純型付 λ 計算への変換として CPS 変換を利用しており，本論文や [4] の証明と同じアイディアに基いているが，直観主義論理の場合は，古典論理の場合のように μ オペレータのようなコントロールオペレータを持たないため継続消滅のような困難がない．

置換簡約を含む自然演繹古典論理の強正規化性は [2]，[14] などで証明されている．[2] では David と Nour が，本論文で扱った $\lambda\mu^{\to\wedge\vee\perp}$ 相当の体系の強正規化性を初等的な概念のみで証明している．[14] では，龍田と Mints が二階の自然演繹古典述語論理の強正規化性を飽和集合の概念を拡張することによって証明している．本論文の方法は CPS 変換を利用している点でこれらとは別のアプローチで証明を与え

るものであり，既存の証明と比較して非常に単純である．

一般的除去規則を含む自然演繹の強正規化性に関しては，含意のみを含む直観主義論理の場合に対し Joachimski と Matthes が強正規化可能な項のクラスの帰納的な定義を与えることによって証明している [8] が，その他の結合子に関する一般的除去規則を含む体系，および古典論理の場合については未だ証明がなかった．

一般的除去規則はその形がシーケント計算の左規則と類似しており，自然演繹とシーケント計算との間の関係を調べる際に有用な概念であると考えられる．実際，一般的除去規則をもつ直観主義自然演繹における正規な証明は，シーケント計算におけるカットのない証明と一対一に対応することが von Plato によって示されている [15]．この結果は，シーケント計算の右交換規則を明示的にすることにより，古典論理にも自然に拡張することができる．シーケント計算の計算論的意味に関しては，大堀によって低レベル機械コードとある種のシーケント計算との対応関係が見出されていたり [11]，Curien と Herbelin の $\overline{\lambda}\mu\tilde{\mu}$ [1]，Wadler の dual calculus [16] などシーケント計算古典論理の証明への項割当て系としてある種の双対性をもつ計算体系が提案されるなど，活発に研究されているが，未だ決定的なものはない．一方，自然演繹は Curry-Howard 同型により，その計算論的側面がかなり詳細に調べられてられており，一般的除去規則に関する計算論的な意味も，通常の自然演繹同様，比較的理解が容易である．例えば $\rightarrow$ 除去に関する β 簡約

$$E^{\rightarrow}(\lambda x.M, N, y.P) \rightarrow P[y := M[x := N]]$$

は直感的に，関数 $\lambda x.M$ に引数 N を渡して計算した結果を，継続 $y.P$ に渡す，という計算であると解釈できる．他の単一除去文脈も，計算結果を渡す継続を保持していると考えることができ，本論文で与えた CPS 変換はそれを反映している．このように計算論的意味の理解が容易な自然演繹とシーケント計算の間に関係が存在することは，シーケント計算の計算論的意味の理解に大きな役割を果たすと考えられる．この目的のためには，正規な証明の間の対応だけではなく，正規でない証明に関する対応を考え，自然演繹における正規化の過程とカット除去の過程との間の関係を考えることが必要であるが，それは今後の課題である．

参考文献

[1] P.-L. Curien and H. Herbelin. The Duality of Computation. In *Proc. 5th International Conference on Functional Programming (ICFP'00)*, pp. 233–243, 2000.

[2] R. David and K. Naur. A short proof of the strong normalization of classical natural deduction with disjunction. *J. Symbolic Logic* 68(4), pp. 1277–1288, 2003.

[3] P. de Groote. A simple calculus of exception handling. In M. Dezani-Ciancaglini and G. Plotkin, Eds., *Typed Lambda Calculi and Applications (TLCA'95)*, *LNCS* 902, pp.201–215, 1995.

[4] P. de Groote. Strong normalization of classical natural deduction with disjunction. In S. Abramsky, Ed., *Typed Lambda Calculi and Applications (TLCA'01)*, *LNCS* 2044, pp.182–196, 2001.

[5] P. de Groote. On the Strong Normalisation of Intuitionistic Natural Deduction with Permutation-Conversions. *Inform. and Comput.* 178, pp.441–464, 2002

[6] K. Fujita. Domain-free $\lambda\mu$-calculus. *Theoretical Informatics and Applications* 34(6), pp.433–466, 2000.

[7] T. Griffin. A formulae-as-types notion of control. In *17th Ann. ACM Symp. on Principles of Programming Languages (POPL'90)*, pp.47–58, 1990.

[8] F. Joachimski and R. Matthes. Short proofs of normalization for the simply-typed λ-calculus, permutative conversions and Gödels's T. *Arch. Math. Logic* 42, pp.59–87, 2003.

[9] R. Matthes. Stabilization — an alternative to double-negation translation for classical natural deduction. In V. Stoltenberg-Hansen Ed., *Proc. Logic Colloquium 2003*, 2004.

[10] K. Nakazawa and M. Tatsuta. Strong normalization proof with CPS-translation for second order classical natural deduction. *J. Symbolic Logic*, 68(3):851–859, 2003. Corrigendum is available in, *The J. Symbolic Logic*, 68(4), pp.1415–1416, 2003.

[11] A. Ohori. The Logical Abstract Machine: a Curry-Howard isomorphism for machine code. In *Proc. Fuji International Symposium on Functional and Logic Programming*, *LNCS* 1722, pp.300–318, 1999.

[12] M. Parigot. $\lambda\mu$-calculus: an algorithmic interpretation of classical natural deduction. In *Proc. International Conference on Logic Programming and Automated Reasoning*, *LNCS* 624, pp.190–201. 1992.

[13] M. Parigot. Strong normalization for second order classical natural deduction. *J. Symbolic Logic* 62(4), pp.1461–1479, 1997.

[14] M. Tatsuta and G. Mints. A simple proof of second-order strong normalization with permutative conversions. *Annals of Pure and Applied Logic* 136, pp.134–155, 2005.

[15] J. von Plato. Natural deduction with general elimination rules. *Annals of Mathematical Logic*, 40(7), pp.541–567, 2001.

[16] P. Wadler. Call-by-value is dual to call-by-name. In *Proc. International Conference on Functional Programming (ICFP'03)*, pp.189–201, 2003.

[17] Y. Yamagata. Strong Normalization of Second Order Symmetric Lambda-mu Calculus. In N. Kobayashi and B.C. Pierce, Eds., *Theoretical Aspects of Computer Software (TACS'01)*, *LNCS* 2215, pp.459–467, 2001.